Staatliche Bibliothek
Regensburg

Philos. 5094

Beispiele und Aufgaben

aus

allen Theilen

der

Arithmetik und Algebra,

soweit diese

auf höheren Schulanstalten gelehrt werden,

nebst deren

Auflösungen

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg.

von

Dr. Johann Albert Arndt,

Subrektor und Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Torgau.

Zweite Auflage.

Leipzig,

Verlag von Christian Conrad Krappe.

1843.

Staatliche Bibliothek
Regensburg
S. 1964/207

Bibliothek
des
K. Alten Gymnasiums
in
Regensburg.

Vorrede.

Bei der vorliegenden Sammlung arithmetischer Aufgaben habe ich namentlich die oberen und mittleren Klassen der Gymnasien und anderer höherer Schulanstalten im Auge gehabt; daher umfaßt sie Aufgaben und Beispiele aus allen den Disciplinen der Arithmetik, welche in diesen vorgetragen zu werden pflegen. Die ersteren Kapitel der Sammlung bieten jedoch auch Stoff zur Uebung in den Gegenständen dar, welche den Unterricht in den unteren Klassen ausmachen. Wer da weiß, wie leicht gerade die gewöhnlichen Rechnungen von Schülern oberer Klassen vergessen werden, dem muß es zweckmäßig erscheinen, daß ein solches Uebungsbuch auch Aufgaben

über Bruch-, Proportions- und ähnliche Rechnungen enthält. Indessen sind, um den Umfang des Buches nicht zu sehr auszudehnen, in den ersteren Kapiteln nur wenige, für den Zweck einer Repetition jedoch völlig hinreichende Beispiele gegeben.

Ueber einzelne Kapitel der Sammlung bemerke ich Folgendes: Beispiele über Zahlensysteme, wie sie das erste Kapitel enthält, fehlen in ähnlichen Sammlungen, und doch scheinen mir dieselben, wenn auch an und für sich von keinem praktischen Nutzen, das wissenschaftliche Verständniß des decadischen Zahlensystemes wesentlich zu erleichtern. Die Kapitel II bis V geben dem oben angedeuteten Zwecke der Sammlung gemäß nur wenige, aber wohl so mannigfaltige Beispiele, wie sie sich ein Schüler bei der Repetition wünschen dürfte. Den Beispielen für Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln im sechsten Kapitel habe ich Beispiele für die Erhebung von Zahlen zum Quadrate und Cubus nach den bekannten Formeln vorangeschickt, indem sich erst durch diese Vorübung sowohl Klarheit im Verständniß, als Sicherheit im Verfahren einstellt. Das siebente Kapitel handelt von den Proportionen und den

auf denselben beruhenden sogenannten Rechnungen des gemeinen Lebens, zu welchen in der neunten Abtheilung auch noch weniger gewöhnliche Aufgaben hinzukommen. Die Kapitel VIII, IX, X bieten hinreichenden Stoff zur Uebung in der Rechnung mit Buchstabenausdrücken und imaginären Größen dar; die fünfte Abtheilung des achten Kapitels dient zugleich zur Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten. Das elfte Kapitel giebt Beispiele über die Bedeutung der Parenthesen, in deren Anwendung der Lernende nicht genug geübt werden kann. Kapitel XII enthält Aufgaben aus der Lehre von den Logarithmen, und Kapitel XIII aus der Lehre von den Kettenbrüchen. Als Vorübung für die Gleichungen, namentlich in Bezug auf die Anwendung allgemeiner Auflösungen auf specielle Fälle, dient das vierzehnte Kapitel. Aufgaben für die Gleichungen selbst, und zwar für Gleichungen des ersten, zweiten und dritten Grades, so wie für unbestimmte, finden sich in Kapitel XV bis XIX. Ich habe hiervon eine ziemlich bedeutende Anzahl gegeben, da wohl unter allen gewöhnlich auf Schulen vorzutragenden arithmetischen Disciplinen für das klare Auffassen gegebener Größenverhältnisse und dadurch mittelbar für zweckmäßige

Uebung des Verstandes nichts im höheren Grade bildend ist und die Urtheilskraft mehr schärft, als das Aufstellen von Gleichungen aus gegebenen Aufgaben. Freilich hat dies für den Lernenden oft große Schwierigkeit, und Schüler, welche eine nicht leichte aufgestellte Gleichung richtig lösen können, sind oft nicht im Stande, den Ansatz bei ganz einfachen Aufgaben zu finden. Der Grund hiervon liegt wohl zum großen Theil darin, daß gewöhnlich sogleich zu Anfang zu schwierige Aufgaben gegeben werden; der Schüler muß sich zuerst selbst mit der wissenschaftlichen Auflösung solcher Aufgaben beschäftigen, die er leicht im Kopfe ausrechnen könnte, um den Zusammenhang aufzufinden, in welchem die wissenschaftliche Auflösung mit dem gewöhnlich ganz unbewußten Verfahren beim Kopfrechnen steht. Ferner habe ich es immer zweckmäßig gefunden, ehe man noch den Schüler im Auffinden des Ansatzes übt, so wie später zugleich mit dieser Uebung den umgekehrten Weg einzuschlagen und aus einer in Zahlen oder Buchstaben gegebenen Gleichung durch Worte ausgedrückte Aufgaben bilden zu lassen. Es enthält deshalb namentlich das funfzehnte Kapitel zuerst viele leichte Aufgaben, und zwar sind die, welche die Gleichung sogleich aufgestellt

und welche sie in Worte gefaßt geben, nicht von einander getrennt, sondern mit einander verbunden, so daß zuweilen auf eine in Zeichen dargestellte Gleichung eine in Worte eingekleidete folgt, welche auf jene führt, und der Schüler sich dadurch in dem oben angedeuteten umgekehrten Verfahren üben kann. Auch habe ich allgemeine und specielle Aufgaben sehr oft zusammengefaßt oder auf einander folgen lassen, wobei dann eine ähnliche Uebung möglich ist, wie bei den Aufgaben des vierzehnten Kapitels. In den Kapiteln XV bis XIX, sowie in dem zwanzigsten, welches über Progressionen, arithmetische Reihen höherer Ordnungen, zusammengesetzte Zins- und Rentenrechnung handelt, und in dem einundzwanzigsten, welches Beispiele für die Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält, sind nur solche Aufgaben gewählt, deren Auflösung keine tiefere Kenntniß anderer, namentlich physikalischer Lehren erfordert. In dem zweiundzwanzigsten Kapitel gehen den Beispielen für den binomischen Lehrsatz Aufgaben zur Entwickelung der Produkte binomischer Faktoren vorher, da jener als ein besonderer Fall von dieser betrachtet werden kann.

Möge diese Sammlung zur Belebung und Erleichterung des Unterrichts in den arithmetischen Disciplinen, denen sie gewidmet ist, beitragen und sich bei sachverständigen Männern einer nicht ganz mißfälligen Aufnahme und einer nachsichtigen Beurtheilung zu erfreuen haben!

Torgau, im August 1840.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Beispiele über Zahlensysteme 1 — 60 . . . . Seite 1

Zweites Kapitel.

Beispiele über die Theilbarkeit der Zahlen, Primzahlen, Theiler u. s. w. 1 — 10 5

Drittes Kapitel.

Bruchrechnung 1 — 10 8

Viertes Kapitel.

Decimalbrüche 1 — 11 12

Fünftes Kapitel.

Einfache Rechnungen mit benannten Zahlen 1 — 13 . . 16

Sechstes Kapitel.

Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln.
I. Quadratwurzeln 1 — 5 21
II. Cubikwurzeln 6 — 10 24

Siebentes Kapitel.

Proportionen und die auf dieselben sich stützenden Rechnungen.
I. Arithmetische Proportionen 1 — 5 26
II. Geometrische Proportionen 6 — 8 28
III. Einfache Proportionsrechnung 9 — 24 . . . 29
IV. Zusammengesetzte Proportionsrechnung 25 — 33 . 30
V. Einfache Zinsrechnung 34 — 53 32
VI. Reductionsrechnung 54 — 66 33
VII Repartitionsrechnung 68 — 73 35
VIII. Alligationsrechnung 74 — 85 36
IX. Einige Beispiele, bei denen Größen vorkommen, welche im Verhältnisse der zweiten und dritten Potenzen anderer Größen stehen 86 — 105 37

Achtes Kapitel.

Rechnung mit Buchstabenausdrücken, in welchen nur Potenzen mit ganzen positiven Exponenten vorkommen.

I. Addition 1 — 18 . . . . . . Seite 40
II. Subtraction 1 — 31 42
III. Multiplication 1 — 70 43
IV. Division 1 — 70 50
V. Division, wo der Divisor in dem Dividendus nicht aufgeht, oder Entwickelung der Brüche in unendliche Reihen, zur Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten 1 — 25 57
VI. Potenzen von Potenzen 1 — 24 60
VII. Wurzeln aus Potenzen 1 — 20 61
VIII. Quadratwurzeln aus zusammengesetzten Buchstabenausdrücken 1 — 24 62
IX. Cubikwurzeln aus zusammengesetzten Buchstabenausdrücken 1 — 20 65

Neuntes Kapitel.

Rechnung mit Buchstabengrößen, bei denen auch Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten vorkommen.

I. Beispiele zur Erläuterung der Bedeutung der negativen und gebrochenen Exponenten 1 — 30 68
II. Multiplication 1 — 33 70
III. Division 1 — 29 75
IV. Potenzen von Potenzen, Wurzeln aus Potenzen, sowie Quadrat- und Cubikwurzeln aus Polynomen 1 — 40 78

Zehntes Kapitel.

Rechnung mit imaginären Größen.

I. Bezeichnung und Bedeutung imaginärer Größen und Absonderung der unter dem Wurzelzeichen vorkommenden vollständigen Quadrate 1 — 12 82
II. Addition und Subtraction 1 — 8 83
III. Multiplication 1 — 26 83
IV. Division 1 — 16 84
V. Quadratwurzel aus Binomen von der Form $A+B\sqrt{-1}$. 1 — 10 86

Elftes Kapitel.

Veränderung in der Form der Buchstabenausdrücke.

I. Auflösung der Parenthesen 1 — 24 86
II. Bilden von Parenthesen 1 — 20 88

III. Vereinigung der Brüche 1 — 30 . . . Seite 89
IV. Aufheben der Brüche 1 — 17 92

Zwölftes Kapitel.

Logarithmen.
I. Bestimmung der Logarithmen zusammengesetzter Ausdrücke 1 — 10 94
II. Summen, Differenzen, Vielfache und Theile von Logarithmen auszudrücken als Logarithmen von Produkten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln 1 — 10 . . 95
III. Beispiele für die Bestimmung der Logarithmen von Zahlen mit mehr als 5 Ziffern, und der Zahlen, die zu gegebenen Logarithmen gehören 1 — 26 . . . 96
IV. Wirkliche Berechnung von Zahlenausdrücken mit Hülfe der Logarithmen 1 — 41 97

Dreizehntes Kapitel.

Kettenbrüche.
I. Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Kettenbrüche, nebst Angabe der Näherungswerthe 1 — 13 . . 100
II. Entwickelung der Quadratwurzeln in continuirliche Brüche 1 — 12 105

Vierzehntes Kapitel.

Bestimmung des Zahlenwerthes von Buchstabenausdrücken, wenn man für die Buchstaben in denselben bestimmte Zahlenwerthe setzt 1 — 26 108

Funfzehntes Kapitel.

Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe 1 — 200 113

Sechszehntes Kapitel.

Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren unbekannten Größen 1 — 125 138

Siebzehntes Kapitel.

Gleichungen des zweiten Grades mit einer oder mit mehreren unbekannten Größen 1 — 128 163

Achtzehntes Kapitel.

Gleichungen des dritten Grades mit einer oder mit mehreren unbekannten Größen 1 — 65 184

Neunzehntes Kapitel.

Unbestimmte Aufgaben 1 — 57 194

Zwanzigstes Kapitel.

Progressionen, arithmetische Reihen höherer Ordnung, zusammengesetzte Zins- und Rentenrechnung.

I. Arithmetische Progressionen 1 — 40 . . . . Seite 204
II. Geometrische Progressionen 41 — 83 208
III. Arithmetische Reihen höherer Ordnung 84 — 131 . 212
IV. Zusammengesetzte Zins- und Rentenrechnung 132 — 180 218

Einundzwanzigstes Kapitel.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. Permutationen 1 — 37 225
II. Combinationen 38 — 59 230
III. Variationen 60 — 71 238
IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung 72 — 109 . . . 243

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Entwickelung der Produkte binomischer Faktoren und binomischer Lehrsatz.

I. Entwickelung der Produkte binomischer Faktoren 1—35 253
II. Binomischer Lehrsatz 36 — 67 260

Erstes Kapitel.

Beispiele über Zahlensysteme.

1) Wie wird 186 (10)*) in den verschiedenen Zahlensystemen geschrieben? Antwort:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(11)	(12)	(13)
10111011	20221	2323	1222	511	355	273	227	160	137	115

2) Wie wird 150 (10) in den verschiedenen Zahlensystemen geschrieben? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(11)	(12)
10010110	12120	2112	1100	410	303	226	176	127	106

3) Wie 86 (10)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(11)	(12)	(13)
1010110	10012	1112	321	222	152	126	105	79	72	68

4) Wie 151 (7)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1010101	10011	1111	320	221	125	104	85	68	71	67

5) Wie 21021 (3)? Antw.:

(2)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
11000100	3010	1241	524	400	304	237	196	169	144	121

6) Wie 145 (10)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(11)	(12)
10010001	12101	2101	1040	401	265	221	171	122	101

---

*) Die in Parenthesen eingeschlossenen Zahlen sind decatische Zahlen, welche die jedesmalige Basis anzeigen.

7) Wie 89 (11)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(12)	(13)
1100001	10121	1201	342	241	166	141	117	97	81	76

8) Wie △*)6 (12)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1111110	11200	1332	1001	330	240	176	150	126	105

9) Wie 10100101 (2)? Antw.:

(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
20010	2211	1130	433	324	245	203	165	140	119

10) Wie 194 (11)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(12)
11100090	22022	3200	1344	1012	440	340	268	224	168

11) Wie 505 (8)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(9)	(10)	(11)	(12)
101000101	110001	11011	2300	1301	643	401	325	276	231

12) Wie 1839 (10)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
11100101111	2112010	130233	24324	12303	5235	3457

(9)	(11)	(12)
2463	1422	1093

13) Wie 67766 (10)? Antw.:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1101001101110	100021121	1221232	204031	51154	25504

(8)	(9)	(11)	(12)
15156	10247	50△1	3△▽**)△

14) Wie wird 212 im Zehnzahlensysteme geschrieben, je nachdem man es als eine Zahl betrachtet in einem Systeme, deren Basis 3, oder 4, oder 5 u. s. w. ist? Antw.:

Ist die Basis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
so muß 212	23	38	57	80	107	138	173	212	255	302

im Zehnzahlensysteme geschrieben werden.

---

*) △ bezeichnet Zehn.

**) ▽ bezeichnet Eilf.

15) wie 231? Antw.:

Basis	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378

16) Wie 312? Antw.

Basis	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	54	82	116	156	202	254	312	376	446	522	604	692

17) Wie 121? Antw.:

Basis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

18) Wie 201? Antw.:

Basis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	19	33	51	73	99	129	163	201	243	289	339	373

19) Wie 223? Antw.:

Basis	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	43	63	87	115	147	183	223	267	315

20) Wie 2321? Antw.:

Basis	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	185	336	553	848	1233	1720	2321	3048	3913

21) Addire (6)

```
 21051
 31440
  2110
   554
──────
100035
```

22) (2)

```
 1101110
   10111
  111101
    1001
   11011
────────
11100110
```

23) (8)

```
 157
 235
1426
2041
 712
────
4615
```

24) (3)

```
  12011
   2210
   2112
  11012
 121101
   1211
───────
1012211
```

25) (3)

```
 13441
  4203
    12
103214
   312
──────
132242
```

26) (12)
128
71△
△9
10▽3
△1▽
―――
2855

27) (12)
99
135
▽△1
210△
△715
―――
11△16

28) (12)
△△1
3574
21▽1△
3789
△1756
△▽902
―――
1▽▽398

20) Subtrahire 3174 (9)
1035
―――
2138

30) 11011 (2)
1101
―――
1110

31) 12413 (6)
5155
―――
3214

32) 2310 (4)
323
―――
1321

33) 13641 (7)
1655
―――
11652

34) 919△ (11)
1△91
―――
7209

35) 13△1 (12)
▽19
―――
484

36) 10633 (12)
243△
―――
△1▽5

37) Multiplication: 134×2 (5) = 323
38) 35×34 (6) = 2202
39) 1101×101 (2) = 1000001
40) 1347×26 (8) = 37732
41) 1354×312 (7) = 462411
42) 21201×1201 (3) = 111010101
43) 1323×221 (4) = 1032303
44) 691×74 (11) = 462△4
45) 3△19×172 (12) = 618566
46) △▽1△×9△ (12) = 8▽5804
47) Division: 2101 : 11 (3) = 121
48) 454 : 31 (8) = 14
49) 11000100 : 111 (2) = 11100
50) 233 : 6 (9) = 35
51) 23121 : 312 (4) = 31 mit dem Reste 123
52) 25313 : 142 (6) = 141 mit dem Reste 11
53) △213 : △4 (11) = △9

54) △0▽4 : 48 (12) = 21▽

55) 12812 : 135 (12) = △5 mit dem Reste 11

56) 2102112 : 1121 (3) = 1112 mit dem Reste 20

57) Welchen Werth hat [1312 + 202 = 131]. 32 (5)?
Antw. 104311

58) Welchen hat $\frac{[626 + 1341 - 1604].265}{114}$ (7)? Antw. 1232

59) Welchen $\left[\frac{11100011 - 1110111}{10010} + 1011011\right] \times 1001011$ (2)? Antw. 111000101011

60) Welchen $\left[\frac{470 \times 240}{130} - 57\triangle\right] \times 1139$(12)? Antw. 327876

Zweites Kapitel.

Beispiele über die Theilbarkeit der Zahlen Primzahlen, Theiler u. s. w.

1) Welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, gehen auf in

	Antwort:
23660?	alle
29576820?	2, 3, 4, 5, 6, 10,
3960?	alle
77115?	3, 5
15840?	2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11
495?	3, 5, 9, 11
13860?	2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11
29576820?	2, 3, 4, 5, 6

2) Folgende Zahlen in ihre Primfaktoren zu zerlegen:

Antworten:

$37800 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . 7$

$510510 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17$

$10702692000 = 2^5 . 3^5 . 5^3 . 7 . 11^2 . 13$

$1000000 = 2^6 . 5^6$

$113322 = 2 . 3 . 11 . 17 . 101$

$16830 = 2 . 3^2 . 5 . 11 . 17$

$8943 = 3 . 11 . 271$

$10989 = 3^3 . 11 . 37$

$1836 = 2^2 . 3^3 . 17$

$1837 = 11 . 167$

$291020 = 2^2 . 3 . 5 . 7^3 . 19$

$9383950 = 2 . 3^3 . 5^2 . 13 . 23^2$

$31935 = 3 . 5 . 2129$

$36018 = 2 . 3^3 . 23 . 29$

$342953 = 13 . 23 . 31 . 37$

3) Welches sind die Primzahlen zwischen 700 und 800? Antw. 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797.

4) Welche Zahlen zwischen 800 und 900 sind durch 19 theilbar? Antw. 817, 836, 855, 874, 893.

5) Unter den Zahlen von 1 bis 100 Zahlen zu finden, welche keine absoluten Primzahlen, aber relative Primzahlen sind zu

Antwort:

12? 25, 35, 49, 55, 65, 77, 85, 91, 95
42? 25, 55, 65, 85, 95
60? 49, 77, 91
70? 9, 27, 33, 39, 51, 57, 69, 81, 87, 93, 99

6) Durch welche Zahlen ist theilbar

Antwort:

72? 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
1000? 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 225, 500, 1000

215? 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216

1300? 1, 2, 4, 5, 10, 13, 20, 25, 26, 50, 52, 65, 100, 130, 260, 325, 650, 1300

8400? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 20, 21, 24, 25, 28, 30, 35, 40, 42, 48, 50, 56, 60, 70, 75, 80, 84, 100, 105, 112, 120, 140, 150, 168, 175, 200, 210, 240, 280, 300, 336, 350, 400, 420, 525, 560, 600, 700, 840, 1050, 1200, 1400, 1680, 2100, 2800, 4200, 8400

7) Was ist $\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$? Antw. 64

$\frac{678 \cdot 3 \cdot 711 \cdot 624 \cdot 1000}{1130 \cdot 790 \cdot 390 \cdot 81}$? Antw. 32

$\frac{100 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$? Antw. 3628800

$\frac{12 \cdot 28 \cdot 33 \cdot 64}{44 \cdot 7 \cdot 16}$? Antw. 144

$\frac{1836 \cdot 341 \cdot 56}{154 \cdot 408 \cdot 93}$? Antw. 6

8) Welches ist der größte gemeinschaftliche Theiler von

	Antw.		Antw.
256 und 3728?	16	3560 und 9776?	8
73845 und 84015?	45	16445 und 29601?	3289
44772 und 55104?	3444	322146 und 439290?	29286
21240 und 29736?	4248	1045 und 1083?	19
978 und 1630?	326	220236 u. 367060?	73412
3174 und 8723?	1	19486240 u. 75022024?	974312
1963 und 3322?	151	9190 und 20218?	1838

877779 und 3023461? A. 97531.

9) Welches ist der größte gemeinschaftliche Theiler von

4224, 6336, 2464 und 528? Antw. 176

82656, 55104, 44772, 29848? Antw. 1148

166, 249, 498, 1245? Antw. 83

1392, 1044, 3480, 2871? Antw. 87

2532, 5908, 13926, 32705? Antw. 211
840, 960, 1860, 3120, 4140? Antw. 60
999900, 154440, 381150, 881100? Antw. 990
346, 1557, 2595, 1740? Antw. 1

10) Welches ist der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von 355 und 497? Antw. 2485. 357 und 595? A. 1785. 198, 275 und 405? A. 44550. 63, 88, 144, 153, 221, 418, 741, 1001? A. 46558512. 345, 590, 1357? A. 46710. 5, 8, 15, 21, 28? A. 840. 54, 90, 120? A. 1080. 299, 391? A. 5083. 10, 47, 70, 94, 470, 1081? A. 75670 143, 187, 299, 391? A. 55913. 7550, 10100, 19897, 29747? A. 300444700. 180 und 270? A. 540. 840 und 848? A. 99040. 840 und 1540? A. 9240. 189 und 630? A. 1890. 1024 und 848? A. 54272. 126, 84, 63, 28? A. 252. 65, 143, 187, 260, 232, 340, 319? A. 2819960. 355 und 639? A. 3195. 115, 253, 319 667? A. 36685. 481, 851, 713, 1147? A. 342953. 414, 522, 621? A. 36018. 280, 720, 1300, 910, 1430, 4620? A. 3603600. 1127, 1547, 3367, 4669, 4459, 9947? A. 1870742237. 169, 473, 299, 1333, 403, 460? A. 1139901620. 4879, 2303, 2891, 4277, 2419, 2773? A. 1231181497. 420 nnd 510? A. 7140. 48, 60, 90, 140, 210, 350? A. 25200 533, 4277, 19270, 28210, 101990? A. 54360670.

Drittes Kapitel.

Bruchrechnung.

1) Brüche mit ganzen Zahlen zu multipliciren und zu dividiren:

$\frac{98}{157} \times 5 = \frac{490}{157}$. $\frac{17}{88} \times 11 = \frac{17}{8}$ $\frac{131}{1000} \times 10 = \frac{131}{100}$.
$\frac{23}{20} \times 11 = \frac{253}{80}$. $\frac{27}{98} \times 2 = \frac{27}{49}$. $\frac{315}{514} : 15 = \frac{21}{514}$.

$\frac{17}{19} : 3 = \frac{17}{57}$. $\frac{111}{200} : 3 = \frac{87}{200}$. $\frac{1314}{2185} : 18 = \frac{73}{2185}$.
$\frac{17}{209} \times 11 = \frac{17}{19}$. $\frac{235}{236} : 47 = \frac{5}{236}$. $\frac{18}{23} : 5 = \frac{18}{115}$.
$\frac{1078}{7319} : 77 = \frac{14}{7319}$. $\frac{230}{1047} \times 349 = \frac{239}{3}$. $\frac{1043}{1074} : 149 = \frac{7}{1074}$.
$\frac{71}{530} : 5 = \frac{71}{2650}$. $\frac{464}{521} : 29 = \frac{16}{521}$. $\frac{551}{553} \times 79 = \frac{551}{7}$.
$\frac{715}{719} : 13 = \frac{55}{719}$. $\frac{999}{1063} : 27 = \frac{37}{1063}$. $\frac{5}{1062} \times 18 = \frac{5}{59}$.
$\frac{11}{837} \times 31 = \frac{11}{37}$. $\frac{799}{835} : 47 = \frac{17}{835}$. $\frac{34}{101} \times 8 = \frac{272}{101}$.
$\frac{171}{8390} \times 10 = \frac{171}{839}$. $\frac{957}{1316} : 29 = \frac{33}{1316}$. $\frac{73}{501} : 7 = \frac{73}{3507}$.
$\frac{711}{800} : 79 = \frac{9}{800}$. $\frac{91}{424} \times 53 = \frac{91}{8}$. $\frac{41}{71} : 8 = \frac{41}{468}$.
$\frac{441}{920} : 63 = \frac{7}{920}$. $\frac{91}{210} : 6 = \frac{91}{1260}$.

2) Folgende Brüche aufzuheben:

$\frac{6552}{7560} = \frac{13}{15}$. $\frac{322146}{439290} = \frac{11}{15}$ $\frac{3561}{9776} = \frac{3561}{9776}$.
$\frac{4459456000}{107026950000} = \frac{5}{12}$. $\frac{1045}{1083} = \frac{55}{57}$. $\frac{978}{1630} = \frac{3}{5}$.
$\frac{111105}{135795} = \frac{9}{11}$. $\frac{1887}{2109} = \frac{17}{19}$. $\frac{5221}{6129} = \frac{23}{27}$.
$\frac{4048}{8464} = \frac{11}{23}$. $\frac{840}{1240} = \frac{21}{31}$. $\frac{9396}{13536} = \frac{261}{376}$.
$\frac{2457}{3861} = \frac{7}{11}$. $\frac{3456}{1224} = \frac{48}{17}$. $\frac{1757\text{[illegible]}}{25967} = \frac{21}{31}$.
$\frac{370}{814} = \frac{5}{11}$. $\frac{9828}{10024} = \frac{351}{358}$. $\frac{366050}{21963} = \frac{50}{3}$.
$\frac{9189}{7515} = \frac{204}{167}$ $\frac{5809}{7850} = \frac{37}{50}$. $\frac{5941}{1371} = \frac{13}{3}$.
$\frac{9811}{10311} = \frac{9811}{10311}$. $\frac{374}{726} = \frac{17}{33}$

3) Brüche auf andere Nenner zu bringen:

$\frac{15}{17}$ auf den Nenner 170: Antw. $\frac{150}{170}$. $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 60: A. $\frac{45}{60}$. $\frac{16}{21}$ auf 8: A. $\frac{6\frac{2}{21}}{8}$. $\frac{1345}{5394}$ auf 100: A. $\frac{25\frac{1325}{2687}}{100}$. $\frac{17}{19}$ auf 16: A. $\frac{14\frac{6}{19}}{16}$. $\frac{311}{511}$ auf 20: A. $\frac{12\frac{88}{511}}{20}$. $\frac{111}{133}$ auf 10: A. $\frac{15\frac{3}{133}}{18}$. $\frac{3}{5}$ auf 4: A. $\frac{2\frac{2}{5}}{4}$. $\frac{1311}{4100}$ auf 100: A. $\frac{31\frac{40}{41}}{100}$. $\frac{81}{100}$ auf 90: A. $\frac{72\frac{9}{10}}{90}$. $\frac{131}{411}$ auf 1233: A. $\frac{393}{1233}$. $\frac{21}{23}$ auf 50: A. $\frac{45\frac{15}{23}}{50}$. $\frac{1371}{5134}$ auf 10142: A. $\frac{2708\frac{905}{2567}}{10142}$. $\frac{7}{9}$ auf 2: A. $\frac{1\frac{5}{9}}{2}$.

4) Brüche zu addiren:

$\frac{15}{32} + \frac{17}{48} + \frac{23}{60} + \frac{59}{120} = 1\frac{289}{480}$.
$\frac{239}{310} + \frac{401}{434} + \frac{501}{764} + \frac{334}{955} + \frac{1012}{1337} = 3\frac{379113}{828940}$.

$\frac{37}{34}+\frac{11}{58}+\frac{50}{87}+\frac{96}{145}+\frac{79}{170}+\frac{25}{186}+\frac{222}{527}+\frac{500}{899}=3\frac{12182}{15283}.$

$\frac{17}{26}+\frac{16}{65}+\frac{19}{94}+\frac{111}{135}+\frac{513}{611}=2\frac{4201}{5499}.$

$\frac{112}{279}+\frac{77}{310}+\frac{329}{330}+\frac{300}{341}=2\frac{1616}{3069}.$

$\frac{31}{40}+\frac{71}{170}+\frac{131}{306}+\frac{212}{255}=2\frac{2767}{6120}.$

$\frac{11}{21}+\frac{17}{35}+\frac{32}{65}+\frac{12}{13}+\frac{112}{143}=3\frac{625}{3003}.$

$\frac{314}{765}+\frac{721}{935}+\frac{313}{990}+\frac{991}{1122}=2\frac{3206}{8415}.$

$\frac{250}{279}+\frac{308}{315}+\frac{300}{341}+\frac{371}{372}+\frac{111}{440}=4\frac{391}{122760}.$

$\frac{13}{35}+\frac{41}{91}+\frac{200}{217}+\frac{201}{286}+\frac{311}{606}+2\frac{45114352}{47011965}.$

$\frac{211}{240}+\frac{311}{455}+\frac{411}{728}+\frac{511}{1365}=2\frac{313}{624}.$

3) Brüche zu subtrahiren:

$3\frac{113}{120}-1\frac{71}{72}=1\frac{43}{45}.$

$8\frac{22}{9797}-3\frac{7891}{15857}=4\frac{776156}{15538129}.$

$10\frac{1000}{388944}-5\frac{10001}{636030}=4\frac{7636582}{7738365}.$

$9\frac{355}{356}-2\frac{444}{445}=6\frac{1779}{1780}.$

$5\frac{311}{517}-2\frac{461}{470}=2\frac{3209}{5170}.$

$5\frac{1001}{4524}-1\frac{2001}{5655}=3\frac{19621}{22620}.$

$6\frac{9712}{16677}-3\frac{15001}{18639}=2\frac{246374}{316863}.$

$5\frac{611}{655}-1\frac{1001}{1048}=2\frac{246374}{316863}.$

$3\frac{4031}{4356}-1\frac{3211}{3366}=1\frac{7993}{8228}.$

$9\frac{910}{1041}-2\frac{3411}{3470}=6\frac{9277}{10410}.$

$8\frac{1072}{1073}-7\frac{1109}{1110}=\frac{32189}{32190}.$

$11\frac{537}{644}-2\frac{683}{782}=8\frac{10515}{10948}.$

$24\frac{311}{12333}-13\frac{4000}{45221}=10\frac{127084}{135663}.$

$35\frac{5}{144}-20\frac{22}{45}=14\frac{131}{240}.$

$7\frac{5}{33}-3\frac{15}{22}=3\frac{31}{66}.$

$27\frac{62189}{78540}-12\frac{36379}{65450}=15\frac{92671}{392700}.$

6) Wie groß ist der Werth von

$1\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}-4\frac{4}{5}+5\frac{5}{6}=6\frac{6}{7}+7\frac{7}{8}=8\frac{8}{9}+9\frac{9}{10}$?

Antw. $5\frac{1627}{2529}.$

$1-\frac{1}{11}+\frac{1}{121}-\frac{1}{1331}+\frac{1}{1464}\ \frac{1}{161051}$? A. $\frac{147630}{161051}.$

$1+\frac{1}{11}+\frac{1}{121}+\frac{1}{1331}+\frac{1}{14651}+\frac{1}{116051}$? A. $1\frac{16105}{161051}.$

7) Brüche mit Brüchen zu multipliciren und zu dividiren:

$1\frac{1}{4}\times 3\frac{1}{5}=4.$ $7\frac{11}{12}:1\frac{1}{3}=5\frac{15}{16}$

$8:\frac{2}{3}=12.$ $1\frac{2}{3}:2=\frac{5}{6}.$ $16\frac{13}{14}\times 2\frac{1}{3}=39\frac{1}{2}.$

$10\frac{1}{2} : \frac{7}{8} = 12.$

$81\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{3} = 109.$

$19\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} = 26.$

$21\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{29} = 44\frac{1}{4}$

$66\frac{4}{5} : 16\frac{7}{10} = 4.$

$11\frac{1}{2} : 5\frac{1}{9} = 2\frac{1}{4}.$

$\frac{372}{275} : \frac{60}{77} = \frac{217}{125}.$

$7\frac{5}{7} : 3\frac{3}{5} = 2\frac{1}{7}.$

$\frac{534}{625} : \frac{333}{175} = \frac{1246}{2775}.$

$76\frac{1}{9} : 182\frac{2}{3} = \frac{5}{12}.$

$10\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{8} = 12.$

$53\frac{1}{3} \times 1\frac{11}{48} = 65\frac{5}{9}.$

$6\frac{1}{2} : 16\frac{5}{18} = \frac{104}{261}.$

$8\frac{2}{3} : 1\frac{1}{6} = 7\frac{3}{7}.$

$2\frac{3}{10} \times \frac{5}{16} = \frac{23}{32}.$

$\frac{7}{83} \times 1\frac{41}{42} = \frac{1}{6}.$

$1 : \frac{1}{3} = 3.$

$5\frac{2}{3} : 4\frac{6}{7} = 27\ \frac{11}{21}.$

$13\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} = 3.$

$17\frac{1}{4} : 4\frac{1}{5} = 4\frac{3}{28}.$

$11\frac{11}{12} : 2\frac{1}{6} = 5\frac{1}{2}.$

$41\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{35} = 85\frac{5}{7}.$

$\frac{341}{648} \times \frac{45}{62} = \frac{55}{144}.$

$6\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{9} = 21.$

$18 : 13\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}.$

$44\frac{4}{7} : 27\frac{4}{5} = \frac{80}{49}.$

$21\frac{5}{7} \times 3\frac{19}{24} = 82\frac{1}{3}.$

$26\frac{2}{5} : 16\frac{1}{2} = 1\frac{3}{5}.$

$116\frac{7}{8} \times 4\frac{2}{3} = 545\frac{5}{12}.$

$3\frac{4}{5} \times 7\frac{1}{2} = 28\frac{1}{2}.$

$7\frac{10}{51} : 7\frac{1}{5} = \frac{1835}{1836}$

$1\frac{1}{33} : 11\frac{1}{3} = \frac{1}{11}.$

$\frac{72}{2185} : \frac{1314}{2185} = \frac{1}{18}.$

$9\frac{1}{3} : 1\frac{2}{7} = 12.$

8) Welchen Werth hat:

$\frac{4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 6\frac{1}{5}}{15\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 4\frac{4}{5}}$? A. $3\frac{3}{4}.$ $\frac{13\frac{1}{2} \cdot 11\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3} \cdot 6\frac{1}{2}}$? A. $4\frac{2}{13}$

$\frac{3\frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 9\frac{3}{5} \cdot 11\frac{3}{7}}{10\frac{2}{3} \cdot 9\frac{1}{7} \cdot 1\frac{1}{9} \cdot 2\frac{7}{16}}$? A. $10\frac{1}{8}$ $\frac{3\frac{1}{7} \cdot 4\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5}}{1\frac{9}{10} \cdot 40\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}$? A. $2\frac{4}{7}.$

$\frac{3\frac{4}{7} \cdot 11\frac{2}{3}}{19\frac{2}{7} \cdot 3\frac{1}{9}}$? A. $\frac{25}{30}$ $\frac{9\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{6} \cdot 3\frac{2}{3}}{7\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{9}}$? A. $3\frac{2}{3}.$

$\frac{114\frac{7}{8} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 5}{1021\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{2}}$? A. $\frac{1838}{1839}$ $\frac{1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 7\frac{4}{5} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot 8\frac{2}{3}}{6\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{7}\ 8\frac{2}{5} \cdot 9\frac{3}{4}}$? A. $\frac{15}{16}$

$\frac{8\frac{1}{5} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot 9\frac{1}{3} \cdot 10\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7}}{12\frac{1}{2} \cdot 13\frac{1}{3} \cdot 4\frac{4}{11} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 12\frac{5}{6}}$? A. $\frac{486}{4375}$ $\frac{5\frac{9}{11} \cdot 9\frac{1}{6}}{\frac{5}{28} \cdot \frac{7}{18}}$? A. 768.

$\frac{7\frac{2}{5} \cdot 36\frac{2}{3}}{\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{6}}$? A. 814 $\frac{8\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 18\frac{5}{9}}$? A. $\frac{1836}{1837}$

9) Welchen Werth haben folgende Bruchbrüche:3

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{7}}$? A. $\frac{7}{8}.$ $\frac{\frac{21}{25}}{\frac{35}{39}}$? A. $\frac{117}{125}$ $\frac{\frac{412}{513}}{\frac{309}{627}}$? A. $1\frac{17}{27}$

$$\frac{\dfrac{1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}}}{\dfrac{\frac{4}{5}}{6\frac{1}{2}}} \text{ ? A. } 3\tfrac{3}{4}. \qquad \frac{\dfrac{1\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}}}{\dfrac{4\frac{1}{2}}{3\frac{3}{4}}} \text{ ? A. } 5. \qquad \frac{\dfrac{3\frac{1}{4}}{7\frac{1}{2}}}{\dfrac{5\frac{1}{3}}{4\frac{2}{7}}} \text{ ? A. } \tfrac{89}{112}.$$

$$\frac{\dfrac{1\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}}}{\dfrac{1\frac{1}{5}}{1\frac{1}{3}}} \text{ ? A. } 1.$$

10) Was ist der Werth von

$$\left[\tfrac{11}{18} + \tfrac{7}{24} - \tfrac{17}{30}\right] \cdot \tfrac{5}{6} \text{ ? Antw. } \tfrac{131}{432}.$$

von $\left[\tfrac{5}{48} + \tfrac{7}{30} - \tfrac{3}{20}\right] \cdot \left[\tfrac{8}{9} - \tfrac{4}{5}\right] : \left[\tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4}\right]$? A. $\tfrac{1}{85}$.

von $\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) : \left[\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}\right)\left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}\right)\right]$? A. $9\tfrac{9}{13}$.

Viertes Kapitel.

Decimalbrüche.

1) Decimalbrüche zu einander zu addiren:

3,4914	5,0578	0,099
0,097	3,40573	1,71
531,78	437,31	49,58917
43,82345	0,005095	1,714
579,19185	3,8	3,0412
	449,578625	56,15337

$$5{,}019 + 1{,}981 = 7.$$

$$3{,}14719 + 5{,}643 + 11{,}59 + 1{,}701784 = 22{,}081974.$$

$$3{,}4913 + 1{,}707 + 139{,}04917 + 9{,}17 + 0{,}3 = 153{,}71747.$$

$$0{,}1 + 0{,}23 + 0{,}456 + 0{,}789 = 1{,}575.$$

$$9{,}9417 + 1{,}91473 + 17{,}884191 + 1{,}004 + 0{,}0179 = 30{,}762521.$$

1,1 + 2,22 + 3,333 + 4,4444 + 5,55555 + 6,666666 + 7,7777777 = 31,0973937.

3,4 + 1,94 + 410,7 + 9,0513 + 0,07 + 4,9134567 + 8,41 + 0,725 + 11,051349 = 450,2511057.

2) Subtrahiren:

9,473	53,5	37,807	91,04
5,9185	0,007	3,95	8,7351
3,5545	53,493	33,857	82,3049

10,5713 — 1,84 = 8,7313. 9,876 — 5,432 = 4,444.
1,2345 — 0,6789 = 0,5556. 5,145 — 1,899003 = 3,245997. 1839 — 0,1839 = 1838,8161.
0,2 — 0,1999 = 0,0001. 31,7 — 9,4 = 22,3.
3,14001 — 0,985357 = 2,154753. 10,31 — 1,031 = 9,279.
31 — 0,0031 = 30,9969. 18,7405 — 1,8 = 16,9405.
0,05 — 0,005 = 0,045

3) Multipliciren:

0,004 × 0,15 = 0,0006. 8,47 × 1,2 = 10,164.
4,5 × 0,04 = 0,18. 3,4 × 0,1 = 0,34.
53,41 × 3,5 = 186,935. 3,4 × 0,005 = 0,017.
93,45 × 0,0036 = 0,33642. 0,315 × 4,4 = 1,386.
2129,6 × 3,75 = 7986. 0,72 × 5,6 × 0,25 = 1,008.
463,75 × 7,025 = 3257,84375.
0,008 × 0,0006 = 0,0000048. 146,8 × 12,5 = 1835.
138,5 × 7,696798 = 1066,006523.
0,0000054 × 378,5 = 0,0020439.
31,71 × 3,23 = 102,4233. 64,3 × 1,92 = 123,456.
3147,9171 × 531,77 = 1673967,876267.
965,254671 × 2,31 = 2229,73829001.

4) Was ist

3,1712 × 6,3413 (auf 4 Stellen)! A. 20,1095.
0,314713 × 1,7134 (auf 6 Stellen)? A. 0,539229.
0,03124 × 0,0413 (auf 6 Stellen)? A. 0,001290.
33,724819 × 0,2730685 (auf 7 Stellen)? A. 9,2091850.
354,444 × 4,291 (auf 3 Stellen)? A. 1520,919.

0,573459 × 1,274638 (auf 6 Stellen) ? A. 0,730951.
1,23456 × 6,54321 (auf 6 Stellen)? A. 8,077985.
9,87654321×1,23456789 (auf 8 Stellen)? A. 12,19326311.
0,2468 × 1,3579 (auf 4 Stellen)? A. 0,3350.

5) Dividiren:

14,64 : 12 = 1,22. 21,749 : 7 = 3,107.
1839,77568 : 3,24 = 567,832. 85475 : 3,25 = 26300.
7986 : 3,75 = 2129,6. 8,172 : 0,072 = 113,5.
0,0020093724 : 0,0054 = 0,372106. 21,42 : 0,6 = 35,7.
0,09571 : 0,000563 = 170. 14,3 : 4,4 = 3,25
0,0002 : 0,04 = 0,005. 7,4 : 0,3 = 24,[6] *).
90,42 : 0,0006 = 150700. 1 4,32 : 3,6 = 51,2.
7,4 : 1,85 = 4. 180 : 1,1 = 163,[63].
3,24 : 0,018 = 180. 9,78 : 1,2 = 8,15.
57,45 : 2,5 = 22,98. 1 : 0,24 = 4,1[6].
0,00007 : 21,6 = 0,0000032[407].
0,024 : 0,000035 = 6 [85,7142].
47,384 : 3,9 = 12,14[974358]. 24,315 : 0,15 = 162,1.
3,74 : 0,066 = 56,[6]. 0,84 : 1,2 = 0,7.
5,13 : 0,22 = 22,3[18]. 3,175 : 12,5 = 0,254.
35,2 : 0,0021 = 16[761,904]. 0,0020439 : 378,5 = 0,00009054.
0,01078 : 0,4312 = 0,025. 2,387 : 68,7 = 0,034745.
1 : 2,6 = 0,[384615].
41,74 : 8,55 = 4,8[818713450292397660].
4,52 : 18,7 = 0,2[417112299465240 2].
34164,021 : 14,28 = 2426,42123579[54].
0,97777777779 : 0,99 = 0,123456789.

6) Welchen Werth hat

3,514713 : 0,71341 (auf 4 Stellen)? A. 4,9262.
7,14134 : 1,41341 (auf 4 Stellen)? A. 5,0525.
3,417571 : 1,347051 (auf 6 Stellen)? A. 2,537076.
354,4444 : 07,568 (auf 3 Stellen)? A. 12,857.

---

*) Die in Klammern eingeschlossenen Ziffern bilden die Periode.

0,1236617 : 1,573 (auf 6 Stellen)? A. 0,078615.
1 : 0,123456 (auf 6 Stellen) A. 8,100051.
1,988514 : 3,917413 (auf 6 Stellen)? A. 0,507609.

7) Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche:

$\frac{5}{8}$ = 0,625. $\frac{4}{15}$ = 0,2[6]. $\frac{9}{16}$ = 0,5625.
$\frac{7}{9}$ = 0,[7]. $\frac{31}{35}$ = 0,8[857142]. $\frac{6}{11}$ = 0,[54].
$\frac{7}{18}$ — 0,3[8]. $\frac{13}{14}$ = 0,9[285714]. $\frac{51}{80}$ = 0,6375.
$\frac{13}{21}$ = 0,[619047]. $\frac{19}{20}$ = 0,95. $\frac{104}{75}$ = 1,38[6].
$\frac{1210}{8000}$ = 0,150125. $\frac{20}{19}$ = 1,[052631578947368421].
$\frac{599}{1100}$ = 0,54[45]. $\frac{31}{36}$ = 0,86[1]. $\frac{73}{84}$ = 0,86[904761].
$\frac{37}{40}$ = 0,925. $\frac{5}{27}$ = 0,[185]. $\frac{59}{264}$ = 0,223[48].
$\frac{31713}{51200}$ = 0,61939453125.
$\frac{91}{248}$ = 0,366[935483870967741].
$\frac{1}{7000}$ = A. 0,000[142857]. $\frac{1}{1600}$ = 0,000625.
$\frac{112}{207}$ = 0,[5410628019323671497584].

8) Verwandlung der Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche:

0,24 = $\frac{6}{25}$. 0,32 = $\frac{8}{25}$ 0,8 = $\frac{2}{25}$.
0,75 = $\frac{3}{4}$. 0,125 = $\frac{1}{8}$ 0,764 = $\frac{93}{125}$.
0,8125 = $\frac{13}{16}$. 0,7 = $\frac{7}{22}$ 0,[6] = $\frac{2}{3}$.
0,[711] = $\frac{79}{111}$ 0,[813450] = $\frac{24650}{30303}$.
0,[428571] = $\frac{3}{7}$. 0,3[18] = $\frac{7}{22}$. 0,847[2] = $\frac{61}{72}$.
0,73[387096774193548] = $\frac{91}{124}$. 0,[12] = $\frac{4}{33}$.
0,650[360855] = $\frac{437953}{673400}$ 0,1125 = $\frac{6}{80}$.

9) Was bedeutet

0,45 . 4,2 : 0,0021? A. 900.
5,01 . 7,2 : 2,3? A. 15,60[3478260869565217391304].
341,75 × 0,022 : 4,84 = A. 1,5534[09].

$$\frac{[57,321 + 1,53 + 9,079 - 33,23]\ 1,8}{0,022}?\ \text{A. } 2839,[09].$$

$$\frac{1,5\ .\ 3,2\ .\ 7,1}{}?\ \text{A. } 75,7[3].$$

$$\frac{2,5[1,35 + 0,00038 - 0,78]}{3,6}?\ \text{A. } 0,396097[2].$$

10) Was bedeutet

$$\frac{3}{4} + 0{,}45\,\frac{2}{11} + 0{,}[47] + 0{,}035 + \frac{7}{8}?$$

A. $2{,}76[65] = \frac{27389}{9900}$.

$$2\frac{3}{8} + 1{,}25 + 4\frac{3}{5} + 2{,}0[72] + \frac{109}{110} + 0{,}579[54]?$$

A. $11{,}86[81] = 11\frac{191}{220}$

11) Was ist

$0{,}2[27] \cdot 0{,}8$? A. $0{,}[18]$. $0{,}[6] \cdot 0{,}75$? A. $0{,}5$.

$0{,}[571428] \cdot 1{,}75$? A. 1. $0{,}3[740] \cdot 0{,}22$? A. $0{,}082[296]$.

Fünftes Kapitel.

Einfache Rechnungen mit benannten Zahlen.

1) Verwandlung von Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niederer Ordnung.

$\frac{3}{11}$ Thlr. = 8 Sgr. $2\frac{2}{11}$ Pf.

$\frac{4}{9}$ Ctr. = 2 St. 4 Pfd. 28 Lth. $1\frac{7}{9}$ Qt.

$\frac{11}{12}$ Wisp. = 1 Mlt. 10 Schfl.

$\frac{13}{15}$ Ctr. = 4 St. 7 Pfd. 10 Lth. $2\frac{2}{3}$ Qt.

$\frac{8}{9}$ Wisp. = 1 Mlt. 9 Schfl. $5\frac{1}{3}$ Mtz.

$\frac{7}{8}$ Ctr. = 4 St. 8 Pfd. 8 Lth.

$\frac{3}{5}$ Wisp. = 1 Mlt. 2 Schfl. $6\frac{2}{5}$ Mtze.

$\frac{1}{39}$ Thlr. = $9\frac{3}{13}$ Pf. $\frac{5}{17}$ Thlr. = 8 Sgr. $9\frac{15}{17}$ Pf.

$\frac{3}{25}$ Ctr. = 13 Pfd. 6 Lth $1\frac{3}{5}$ Qt.

$\frac{21}{25}$ Ballen = 8 Ries 8 Buch.

$\frac{61}{72}$ Ballen = 8 Ries 9 Buch $10\frac{2}{3}$ Bog. $\frac{4}{4}$ R.*) = A. 72°.

---

*) Der rechte Winkel [R] hat 90° (90 Grade), 1° = 60′ (60 Minuten), 1′ = 60″ (60 Sekunden).

$\frac{11}{24}$ R. = 41° 15′. $\frac{31}{32}$ R. = 87° 11′ 15″.
$\frac{2}{7}$ R. = 25° 42′ 51″$\frac{3}{7}$. $\frac{131}{252}$ R. = 46° 47′ 8″$\frac{4}{7}$.

2) Verwandlung von Einheiten niederer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung.

2 St. 1 Pfd. 26 Lth. $2\frac{2}{3}$ Qt. = $\frac{5}{12}$ Ctr.
16 Sgr. $10\frac{1}{2}$ Pf. = $\frac{9}{16}$ Thlr. 1 St. 1 Pfd. 10 Lth. $2\frac{2}{3}$ Qt. = $\frac{7}{33}$ Ctr. 12 Sgr. $10\frac{2}{7}$ Pf. = $\frac{3}{7}$ Thlr. 41 Pfd. 8 Lth. = $\frac{3}{8}$ Ctr.
3 St. 21 Pfd. 10 Lth. $2\frac{2}{3}$ Qt. = $\frac{131}{165}$ Ctr.
5 Sgr. $5\frac{5}{7}$ Pf. = $\frac{23}{126}$ Thlr. 1 Mlt. 5 Schfl. $9\frac{3}{5}$ Mtze. = $\frac{11}{15}$ Wsp.
2 Ries 12 Buch = $\frac{13}{50}$ Ball. 5 Ries 7 Buch $3\frac{3}{7}$ Bog. = $\frac{15}{28}$ Ball.
50° = $\frac{5}{9}$ R. 82° 30′ = $\frac{11}{12}$ R. 64° 38′ 24″ = $\frac{808}{1125}$ R.
24° 32′ $43\frac{7}{11}$″ = $\frac{3}{11}$ R. 84° 48′ $27\frac{9}{13}$″ = $\frac{49}{52}$ R.

3) Wie viel sind 0,95 Thlr. in Silbergroschen und Pfennigen? A. 28 Sgr. 6 Pf. Wie viel 0,72[54] Thlr.? A. 21 Sgr. 9,1[63] Pf. Wie viel 0,781[746031] Thlr.? A. 23 Sgr. 5,[428571] Pf. Wie viel 0, 958[3] Ctr.? Antw. 4 St. 17 Pfd. 13,[3] Lth. Wie viel 0,[692307] Ctr.? A. 3 St. 10 Pfd. 14 Lth. 3,[692307] Qt.

4) Wie viel ist 1 Pf. als Decimalbruch von einem Thaler? Antw. 0,002[7] Thlr. Wie viel 1 Qt. als Decimalbruch von einem Ctr.? A. 0,00007102[27] Ctr. Wie viel 1 Sekunde als Decimalbruch von einem Tage? A. 0,0000115[740] Tag.

5) Wie viel sind 3′ 6″ 9‴ ddc*) in Ruthen? A. 0°,296875. Wie viel sind nun 0°,296875 in Decimal-Fußen u. s. w.? A. 2′ 9″ 6‴,875. Wie viel sind 7′ 7″ 5‴ dc in Ruthen? A. 0°,775. Wie viel sind nun 0°,775 im Duodecimalmaaße? A. 9′ 3″ 7‴,2 ddc. Wie viel sind 6° 7′ 9″ 6‴ ddc im Decimalmaaße? A. 6° 6′ 4″ 9‴,30[5] dc.
Wie viel sind 7° 9′ 4″ 7‴,31 dc im Duodecimalmaaße? A. 7° 11′ 4″ 4‴,95168 ddc.

---

*) Eine Ruthe (1°) hat 12′ ddc [12 Duodecimalfuße], 1′ = 12″ ddc [12 Duodecimalzolle], 1″ = 12‴ ddc [12 Duodecimallinien]. Eine Ruthe ist = 10′ dc [10 Decimalfuße], 1′ = 10″ dc und 1″ = 10‴ dc.

Wie viel sind 137° 11′ 4″ 2‴,688 ddc im Decimalmaaße?
A. 137° 9′ 4″ 6‴ dc.
Wie viel sind 3° 9′ 0‴,578[703] dc im Duodecimalmaaße?
A. 3° 10′ 9″ 8‴,2 ddc. Wie viel ist 1′ ddc in dc?
A. 0′,8[3] dc. Wie viel ist 1′ dc in ddc? A. 1′,2 ddc.
Wie viel ist 1″ ddc in dc? A. 0″,69[4] dc.
Wie viel ist 1″ dc in ddc? A. 1″,44 ddc.
Wie viel ist 1‴ ddc in dc? A. 0‴,578[703] dc.
Wie viel ist 1‴ dc in ddc? 1‴,728 ddc.

6) Jemand erndtet und verkauft

54 Wisp.	13 Schfl.	$7\frac{2}{9}$ Mtze.	43 Wisp.	15 Schfl.	$11\frac{5}{12}$ Mtze.
61 =	12 =	$11\frac{3}{16}$ =	15 =	7 =	$15\frac{11}{14}$ =
101 =	4 =	$6\frac{7}{20}$ =	16 =	— =	$10\frac{20}{21}$ =
64 =	19 =	$1\frac{23}{30}$ =	84 =	13 =	$4\frac{13}{24}$ =

Wie viel erndtet er? A. 282 Wisp. 1 Schfl. $10\frac{379}{720}$ Mtze.
Wie viel verkauft er? A. 159 = 13 = $10\frac{39}{56}$ =
Wie viel bleibt ihm übrig? A. 122 = 11 = $15\frac{4183}{5040}$ =

Jemand kauft und verkauft

51 Ctr.	7 Pfd.	$16\frac{3}{8}$ Lth.	74 Ctr.	13 Pfd.	$7\frac{1}{4}$ Lth.
17 =	71 =	$23\frac{21}{25}$ =	17 =	11 =	$2\frac{5}{22}$ =
47 =	93 =	$11\frac{17}{30}$ =	24 =	109 =	$15\frac{7}{33}$ =
19 =	41 =	$4\frac{11}{15}$ =	11 =	91 =	$13\frac{25}{36}$ =

Wie viel kauft er? A. 135 Ctr. 103 Pfd. $24\frac{47}{1800}$ Lth.
Wie viel verkauft er? A. 128 = 5 = $6\frac{38}{99}$ =
Wie viel bleibt ihm übrig? A. 7 = 98 = $17\frac{1413}{2200}$ =

Addire:	100 Wisp.	$1\frac{14}{15}$	Schfl.
	513 =	$13\frac{18}{39}$	=
	5355 =	$7\frac{15}{52}$	=
	798 =	$5\frac{101}{120}$	=
	5117 =	$2\frac{71}{140}$	=
	45 =	$8\frac{79}{182}$	=
Summe:	11929 Wisp.	$15\frac{1697}{8640}$	Schfl.

7) Subtrahire:	7	Ctr.	6	Pfd.	19	Lth.	$3\frac{591}{598}$	Qt.
	1	=	7	=	21	=	$3\frac{701}{782}$	=
die Differenz ist	5	Ctr.	108	Pfd.	29	Lth.	$3\frac{4785}{5083}$	Qt.

5	Thlr.	—	Sgr.	$1\frac{1312}{4685}$	Pf.
2	=	13	=	$5\frac{10001}{10307}$	=
2	Thlr.	16	Sgr.	$7\frac{15962}{51535}$	Pf.

46	Ctr.	$17\frac{13142}{34925}$	Pfd.
31	=	$19\frac{39741}{41275}$	=
14	Ctr.	$107\frac{2888}{6985}$	Pfd.

8) Jemand starb den **21.** August **1819** früh $\frac{3}{4}$ auf **7** Uhr in einem Alter von **43** Jahren **10** Monaten **23** Tagen **14** Stunden **10** Minuten; wann war er geboren? Antw. **1775** den **28.** Sept. Nachmittags **5** Minuten nach halb fünf Uhr.

Jemand war geboren $\frac{3}{4}$ auf **4** Uhr früh den **19.** April **1794** und starb den **11.** März **1833** Abends halb neun Uhr; wie alt war er, als er starb? Antw. **38** Jahre **10** Monate **20** Tage **16** Stunden **45** Minuten.

Jemand war geboren **1790** den **16.** Januar Abends **5** Minuten vor halb sieben Uhr und starb in einem Alter von **34** Jahren **2** Monaten **28** Tagen **13** Stunden **40** Minuten; wann starb er? Antw. **1824** den **14.** April früh **5** Minuten nach **8** Uhr.

Jemand war geboren den **15** Nov. **1801** früh halb sechs Uhr und starb den **1.** Dec. **1833** früh $\frac{3}{4}$ auf **5** Uhr; wie alt wurde er? Antw. **32** Jahre **15** Tage **23** Stunden **15** Min.

Jemand war geboren **1775** den **15.** Februar früh $\frac{3}{4}$ auf **8** Uhr und starb in einem Alter von **63** Jahren **10** Monaten **16** Tagen **16** Stunden **15** Minuten; wann starb er? A. Am Anfange des Jahres **1839.**

Jemand starb den **12.** Dec. **1834** Abends halb eilf Uhr in einem Alter von **71** Jahren **5** Mon. **23** Tagen **10** Stunden **10** Minuten; wann war er geboren? A. **1763** den **19.** Juni Mittags **5** Minuten nach $\frac{1}{4}$ auf **1** Uhr.

9) 16 Thlr. 4 Sgr. $7\frac{3}{5}$ Pf. × $3\frac{4}{7}$ = 57 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf.

5 Thlr. 7 Sgr. $3\frac{7}{9}$ Pf. × $4\frac{1}{5}$ = 22 Thlr. — Sgr. $8\frac{2}{3}$ Pf.

4 Thlr. 17 Sgr. $3\frac{5}{9}$ Pf. × $4\frac{1}{2}$ = 20 Thlr. 17 Sgr. 10 Pf.

4 Thlr. 11 Sgr. $3\frac{1}{2}$ Pf. × $3\frac{2}{3}$ = 16 Thlr. 1 Sgr. $4\frac{5}{6}$ Pf.

437 Wisp. 11 Schfl. $3\frac{3}{8}$ Mtze. × $9\frac{1}{3}$ = 4083 Wisp. $10\frac{1}{6}$ Mtze.

61 Ctr. 3 St. 11 Pfd. $9\frac{4}{11}$ Lth. × 43 = 2653 Ctr. 1 St. 1 Pfd. $18\frac{7}{11}$ Lth.

31 Wisp. 1 Mlt. 7 Schfl. $6\frac{3}{8}$ Mtze. × 44 = 1399 Wisp. 1 Mlt. 1 Schfl. $8\frac{1}{2}$ Mtze.

5 Ctr. 2 St. 16 Pfd. $3\frac{1}{2}$ Lth. × $4\frac{3}{5}$ = 25 Ctr. 2 St. 12 Pfd. $16\frac{1}{10}$ Lth.

6 Thlr. 19 Sgr. $3\frac{3}{5}$ Pf. × $2\frac{2}{3}$ = 17 Thlr. 21 Sgr. $5\frac{3}{5}$ Pf.

31 Ctr. 17 Pfd. $5\frac{1}{2}$ Lth. × $12\frac{2}{3}$ = 394 Ctr. 70 Pfd. 27 Lth.

10) 3 Thlr. 17 Sgr. 4,[6] Pf. × 5,5 = 19 Thlr. 20 Sgr. 7,[6] Pf.

3 Ctr. 2 Pfd. 7,5 Lth. × 3,2 = 9 Ctr. 73 Pfd. 4,8 Lth.

5 Thlr. 19 Sgr. 4,375 Pf. × 5,[6] = 31 Thlr. 29 Sgr. 8,791[6] Pf.

43 Ctr. 19 Pfd. 4,75 Lth. × 4,6 = 198 Ctr. 66 Pfd. 2,65 Lth.

11) 15 Thlr. 17 Sgr. $7\frac{2}{3}$ Pf. : $4\frac{1}{2}$ = 3 Thlr. 13 Sgr. $11\frac{1}{27}$ Pf.

313 Thlr. 19 Sgr. $7\frac{3}{4}$ Pf. : $3\frac{1}{3}$ = 94 Thlr. 2 Sgr. $10\frac{29}{40}$ Pf.

37 Thlr. 19 Sgr. $6\frac{3}{5}$ Pf. : $2\frac{1}{10}$ = 17 Thlr. 27 Sgr. $10\frac{4}{7}$ Pf.

315 Ctr. 17 Pfd. $16\frac{1}{2}$ Lth. : $7\frac{1}{2}$ = 42 Ctr. 2 Pfd. $10\frac{11}{15}$ Lth.

313 Thlr. 25 Sgr. $3\frac{1}{2}$ Pf. : $5\frac{1}{3}$ = 58 Thlr. 25 Sgr. $4\frac{13}{32}$ Pf.

312 Thlr. 19 gGr. $7\frac{1}{10}$ Pf. : $4\frac{2}{5}$ = 71 Thlr. 2 gGr. $3\frac{1}{4}$ Pf.

211 Ctr. 4 St. 2 Pfd. $28\frac{2}{5}$ Lth. : $7\frac{1}{5}$ = 29 Ctr. 2 St. 2 Pfd. $7\frac{1}{2}$ Lth.

311 Ctr. 17 Pfd. $7\frac{1}{2}$ Lth. : $3\frac{3}{5}$ = 86 Ctr. 47 Pfd. $18\frac{1}{12}$ Pf.

12) 12992 Wisp. 7 Schfl. 5 Mtzn. : 37 Wisp. 15 Schfl. 13 Mtzn. = 345.

2 St. 11 Pfd. 15 Lth. : 5 Pfd. 17 Lth. 2 Qt. = 10.

9 Thlr. $6\frac{2}{5}$ Sgr. : 6 Thlr. $4\frac{4}{15}$ Sgr. = $1\frac{1}{2}$.

5 Wispel 9 Schfl. 8$\frac{2}{5}$ Mtze. : 2 Wispel 1 Mltr. 6 Schfl. 3$\frac{3}{4}$ Mtze. = 1$\frac{43}{45}$.
471 Mlt. 10 Schfl. 9$\frac{1}{2}$ Mtze. : 94 Mlt. 4 Schfl. 8$\frac{3}{10}$ Mtze. = 5.
5 Thlr. 9 Sgr. 9 Pf. : 1 Thlr. 5 Sgr. 6 Pf. = 4$\frac{1}{2}$.
26 Thlr. 12$\frac{1}{2}$ Sgr. : 7 Thlr. 1$\frac{1}{3}$ Sgr. = 3$\frac{3}{4}$.
3 Thlr. 29 Sgr. 10$\frac{1}{2}$ Pf. : 2 Thlr. 15 Sgr. 4$\frac{1}{5}$ Pf. = 1$\frac{13}{22}$.
100 Ctr. 2 Pfd. 5$\frac{1}{5}$ Lth. : 41 Ctr. 74 Pfd. 7$\frac{1}{2}$ Lth. = 2$\frac{2}{5}$.

13) Welchen Werth hat:

$$\frac{[6 \text{ Thlr. } 19 \text{ Sgr. } 5\frac{3}{4} \text{ Pf.}] : 7\frac{1}{2}}{[86 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr. } 2\frac{3}{4} \text{ Pf.}] : 3\frac{1}{3}} \text{ ? A. } \frac{9}{52}.$$

$$\frac{(1399 \text{ Wisp. } 1 \text{ Mlt. } 1 \text{ Schfl. } 8\frac{1}{2} \text{ Mtze.}) : 9\frac{3}{4}}{(31 \text{ Wisp. } 1 \text{ Mlt. } 7 \text{ Schfl. } 6\frac{3}{8} \text{ Mtze.}) : 6\frac{1}{2}} \text{ ? A. } 66.$$

Sechstes Kapitel.

Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln.

I. Quadratwurzeln.

1) Die Formel $(a+b+c+d\ldots)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+\ldots$ auf folgende Zahlenbeispiele anzuwenden:

$(3+5+7+8+9)^2 = 9+30+25+112+49+240+64+414+81 = 1024.$
$(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6})^2 = \frac{9}{16}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+2\frac{1}{12}+\frac{25}{36} = 4\frac{49}{144}.$
$[\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}]^2 = \frac{9}{16}+1+\frac{4}{9}+\frac{17}{12}+\frac{1}{4}+\frac{115}{36}+\frac{25}{36} = 7\frac{9}{16}.$
$(4+\frac{1}{2}+\frac{4}{5})^2 = 16+4+\frac{1}{4}+\frac{36}{5}+\frac{16}{25} = 28\frac{9}{100}.$
$[2+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{3}]^2 = 4+2+\frac{1}{4}+3\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+8\frac{2}{3}+\frac{16}{9} = 21\frac{1}{144}.$
$[7+\frac{1}{2}+4+5]^2 = 49+21+2\frac{1}{4}+68+16+125+25 = 306\frac{1}{4}.$

2) Dieselbe Formel anzuwenden auf Erhebung decadischer Zahlen zum Quadrate:

$437^2 = 16$
249
602
49
190969

$6732^2 = 36$
84
49
4029
26924
45319824

$57342^2 = 25$
70
49
3429
4584
16
229364
3288104964

$47396^2 = 16$
56
49
2829
8514
81
56868
36
2246380816

$973523^2 = 81$
126
49
5829
9730
25
389404
5841129
947747031529

$147954^2 = 18$
16
196
49
2646
81
14790
25
118360
16
21890386116

$30712^2 = 900$
420
49
6141
122844
943226944

$67835^2 = 36$
84
49
1072
64
40689
67830
25
4601587225

$370561^2 = 9$
42
4900
3700
25
44460
36
741121
137315454721

3) $\sqrt{1369} = 37 \qquad \sqrt{10201} = 101$

$\sqrt{710649} = 843 \qquad \sqrt{3370896} = 1836$

$\sqrt{13549761} = 3681 \qquad \sqrt{11881872016} = 109004$

$\sqrt{120888686224083512 25} = 3476905035$

$\sqrt{975461057789971041} = 987654321$

$\sqrt{327184} = 572 \qquad \sqrt{826281} = 909$

$\sqrt{78517321} = 8861 \qquad \sqrt{157678249} = 12557$

$\sqrt{328801321744} = 573412$

$\sqrt{1580380516} = 39754$

$\sqrt{1711890625} = 41375 \qquad \sqrt{1190733049} = 34507$

$\sqrt{18974736} = 4356 \qquad \sqrt{322813089} = 17967$

4) $\sqrt{442} = 21{,}023796\ldots \qquad \sqrt{11} = 3{,}316624\ldots$

$\sqrt{187{,}69} = 13{,}7 \qquad \sqrt{5{,}3} = 2{,}302172\ldots$

$\sqrt{1{,}3} = 1{,}14017\ldots \qquad \sqrt{42{,}3} = 6{,}503845\ldots$

$\sqrt{42{,}321} = 6{,}505459\ldots \qquad \sqrt{4{,}312} = 2{,}076535\ldots$

$\sqrt{41{,}32131} = 6{,}42816\ldots \qquad \sqrt{45} = 6{,}708203\ldots$

$\sqrt{97} = 9{,}848857\ldots \qquad \sqrt{22175622{,}81} = 4709{,}1$

$\sqrt{0{,}00043} = 0{,}0207644\ldots \qquad \sqrt{5{,}[81]} = 2{,}4120907\ldots$

5) $\sqrt{\frac{81}{169}} = \frac{9}{13} \qquad \sqrt{\frac{1156}{2209}} = \frac{34}{47}$

$\sqrt{\frac{115691536}{160452889}} = \frac{10756}{12667} \qquad \sqrt{3\frac{1}{4}} = 1{,}802775\ldots$

$\sqrt{16\frac{5}{18}} = 4{,}034572\ldots \qquad \sqrt{5\frac{7}{45}} = 2{,}270585\ldots$

$\sqrt{13\frac{17}{50}} = 3{,}652396\ldots \qquad \sqrt{35\frac{97}{98}} = 5{,}999149\ldots$

$\sqrt{7\frac{22}{75}} = 2{,}700617\ldots \qquad \sqrt{11\frac{2}{3}} = 3{,}41565\ldots$

$\sqrt{\frac{5}{7}} = 0{,}845154\ldots \qquad \sqrt{3\frac{1}{2}} = 1{,}87082\ldots$

$\sqrt{41\frac{5}{12}} = 6{,}4355\ldots \qquad \sqrt{\frac{5}{63}} = 0{,}281718\ldots$

$\sqrt{7\frac{5}{8}} = 2{,}76134\ldots \qquad \sqrt{3\frac{4}{5}} = 1{,}949358\ldots$

II. Cubikwurzeln.

6) Die Formel $(a+b+c+d+..)^3 = a^3+3a^2b+ +3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+\ldots$ auf folgende Zahlenbeispiele anzuwenden:

$(9+4)^3 = 729+972+432+64 = 2197.$

$(3+4\frac{1}{2}+7)^3 = 27+121\frac{1}{2}+182\frac{1}{4}+91\frac{1}{8}+1181\frac{1}{4}+1102\frac{1}{2}+ +343 = 3048\frac{5}{6}.$

$(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})^3 = \frac{27}{64}+\frac{27}{32}+\frac{9}{16}+\frac{1}{8} = 1\frac{61}{64}.$

$(3+2+4+5)^3 = 27+54+36+8+300+240+64+1215+ +675+125 = 2744.$

$(4+7+3+2)^3 = 64+336+588+343+1089+297+27+ +1176+168+8 = 4096.$

7) Dieselbe Formel anzuwenden auf Erhebung decadischer Zahlen zum Cubus:

$83^3 =$ 512
576
216
27
———
571787

$65^3 =$ 216
540
450
125
———
274625

$437^3 =$ 64
144
108
27
38829
6321
343
———
83453453

$452^3 =$ 64
240
300
125
12150
5408
———
92345408

$4793^3 =$ 64
336
588
343
59643
11421
729
2064969
12933
27
———
110108865257

$3574^3 =$ 27
135
225
125
25725
5145
343
1529388
17136
64
———
45652403224

$$
\begin{array}{r}
94073^3 = 729 \\
972 \\
432 \\
64000 \\
18555600 \\
138180 \\
343 \\
796424841 \\
253989 \\
27 \\
\hline
832520587167017
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
43047^3 = 64 \\
144 \\
108 \\
27000 \\
2218800 \\
20640 \\
64 \\
389012736 \\
632688 \\
343 \\
\hline
79767994064823
\end{array}
$$

8) $\sqrt[3]{185193} = 57$ $\quad$ $\sqrt[3]{658503} = 87$

$\sqrt[3]{15069223} = 247$ $\quad$ $\sqrt[3]{105154048} = 472$

$\sqrt[3]{736314327} = 903$ $\quad$ $\sqrt[3]{106496424} = 474$

$\sqrt[3]{82881856} = 436$ $\quad$ $\sqrt[3]{392223168} = 732$

$\sqrt[3]{428661064} = 754$ $\quad$ $\sqrt[3]{498677257} = 793$

$\sqrt[3]{444194947} = 763$ $\quad$ $\sqrt[3]{131328906787} = 5083$

$\sqrt[3]{831114272808} = 9402$ $\quad$ $\sqrt[3]{6199083253} = 1837$

$\sqrt[3]{5489031744} = 1764$ $\quad$ $\sqrt[3]{430197890149} = 7549$

$\sqrt[3]{104886933696} = 4716$ $\quad$ $\sqrt[3]{128558238823} = 5047$

$\sqrt[3]{11999866576872888} = 228942$

9) $\sqrt[3]{935{,}441352} = 9{,}78$ $\quad$ $\sqrt[3]{3{,}51} = 1{,}51973\ldots$

$\sqrt[3]{34714} = 32{,}6213\ldots$ $\quad$ $\sqrt[3]{868250{,}664} = 95{,}4$

$\sqrt[3]{3{,}41} = 1{,}5051\ldots$ $\quad$ $\sqrt[3]{7{,}23971} = 1{,}934\ldots$

$\sqrt[3]{91{,}74} = 4{,}5101007\ldots$ $\quad$ $\sqrt[3]{5{,}41[6]} = 1{,}75621\ldots$

$\sqrt[3]{0{,}0000015} = 0{,}014471\ldots$ $\quad$ $\sqrt[3]{0{,}13997521} = 0{,}241$

$\sqrt[3]{0{,}000054010152} = 0{,}0378$ $\quad$ $\sqrt[3]{110} = 4{,}791\ldots$

$\sqrt[3]{2{,}5} = 1{,}357\ldots$ $\quad$ $\sqrt[3]{0{,}0046} = 0{,}1663\ldots$

10) $\sqrt[3]{\frac{343}{1728}} = \frac{7}{12}$

$\sqrt[3]{\frac{868250644}{33076161}} = \frac{954}{321}$

$\sqrt[3]{\frac{5067}{216}} = 2{,}862\ldots$

$\sqrt[3]{17\frac{5}{12}} = 2{,}59212\ldots$

$\sqrt[3]{5\frac{3}{20}} = 1{,}72\ldots$

$\sqrt[3]{23\frac{11}{24}} = 2{,}862$

$\sqrt[3]{43\frac{4}{9}} = 3{,}5154\ldots$

$\sqrt[3]{3\frac{4}{5}} = 1{,}5604\ldots$

$\sqrt[3]{\frac{1}{88835939128}} = \frac{1}{4462}$

$\sqrt[3]{\frac{590589719}{898632125}} = \frac{839}{965}$

$\sqrt[3]{4\frac{3}{4}} = 1{,}680987\ldots$

$\sqrt[3]{11\frac{1}{3}} = 2{,}246218\ldots$

$\sqrt[3]{\frac{9}{28}} = 0{,}685\ldots$

$\sqrt[3]{4\frac{16}{63}} = 1{,}6203\ldots$

$\sqrt[3]{93\frac{4}{45}} = 4{,}532\ldots$

$\sqrt[3]{5\frac{5}{18}} = 1{,}74107\ldots$

Siebentes Kapitel.

Proportionen und die sich auf dieselben stützenden Rechnungen.

I. Arithmetische Proportionen.

1) Gegeben a*) $= 4\frac{1}{2}$ b $= 13\frac{2}{3}$ c $= 16$ dann ist d $= 25\frac{1}{6}$.
a $= 5\frac{3}{8}$ b $= 4\frac{5}{6}$ c $= 3\frac{11}{12}$ dann ist d $= 3\frac{3}{8}$.
a $= 9\frac{11}{12}$ b $= 7\frac{15}{16}$ d $= 29\frac{89}{240}$ dann ist c $= 31\frac{7}{20}$.
a $= 131\frac{101}{342}$ b $= 136\frac{20}{57}$ d $= 104\frac{13}{18}$ dann ist c $= 99\frac{2}{3}$.
a $= 7\frac{1}{2}$ c $= 17\frac{3}{4}$ d $= 26\frac{1}{84}$ dann ist b $= 15\frac{16}{21}$.
a $= 3\frac{1}{4}$ c $= 5\frac{1}{16}$ d $= 5\frac{133}{144}$ dann ist b $= 4\frac{1}{9}$.
b $= 13{,}4$ c $= 0{,}0189$ d $= 4{,}3649$ dann ist a $= 9{,}054$.
b $= 11\frac{541}{560}$ c $= 13\frac{1001}{1240}$ d $= 17\frac{205}{217}$ dann ist a $= 7\frac{411}{496}$.

---

*) a, b, c, d bezeichnen respective das 1ste, 2te, 3te, 4te Glied einer arithmetischen Proportion. Dieselbe Bezeichnung gilt bei den geometrischen Proportionen.

2) Was ist die dritte arithmetische Proportionale [einer stetigen Proportion]

zu $13\frac{4}{5}$ und $16\frac{3}{4}$? Antw. $19\frac{7}{10}$.
zu $410\frac{3}{8}$ und $315\frac{13}{14}$? A. $221\frac{27}{56}$.
zu $131\frac{101}{342}$ und $101\frac{41}{418}$? A. $70\frac{3389}{3762}$.
zu $9\frac{51}{91}$ und $8\frac{16}{143}$? A. $6\frac{664}{1001}$.
zu $9\frac{31}{32}$ und $11\frac{11}{12}$? A. $13\frac{83}{96}$.
zu 3,8909 und 2,0505? A. 0,2101.

3) Was ist die mittlere arithmetische Proportionale

zu $4\frac{3}{7}$ und $19\frac{1}{2}$? A. $11\frac{27}{28}$.
zu $43\frac{31}{32}$ und $5\frac{3}{40}$? A. $24\frac{167}{320}$.
zu $4\frac{7}{8}$ und $16\frac{5}{6}$? A. $10\frac{41}{48}$.
zu $3\frac{11}{12}$ und $6\frac{11}{15}$? A. $5\frac{13}{40}$.
zu $1\frac{1}{5}$ und $3\frac{1}{4}$? A. $2\frac{9}{40}$.
zu 0,015 und 0,04? A. 0,0275.

4) Was ist das arithmetische Mittel aus

$1\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{3}$ $3\frac{1}{4}$ $4\frac{1}{5}$ $5\frac{1}{6}$ $6\frac{1}{7}$ $7\frac{1}{8}$ $8\frac{1}{9}$? A. $4\frac{14689}{20160}$.
$8\frac{11}{12}$ $7\frac{3}{16}$ $11\frac{5}{21}$ $12\frac{23}{28}$? A. $10\frac{55}{1344}$.
$1\frac{342}{385}$ $2\frac{516}{655}$ $2\frac{819}{917}$? A. $2\frac{79144}{151305}$.
$6\frac{3}{91}$ $7\frac{17}{130}$ $5\frac{41}{110}$? A. $6\frac{179}{1001}$.
$\frac{4}{9}$ 1,5 1,14 $\frac{7}{11}$ $1\frac{3}{4}$ 0,909 $1\frac{5}{6}$? A. 1,173[305916].

5) Eine Besitzung gab in 4 auf einander folgenden Jahren eine Erndte von

1)	72 Wisp.	13 Schfl.	$13\frac{5}{12}$ Mtze.
2)	75 =	16 =	$11\frac{41}{45}$ =
3)	96 =	11 =	$9\frac{83}{100}$ =
4)	78 =	4 =	$11\frac{101}{110}$ =

Wie viel betrug die Erndte im Durchschnitte?

Antw. 80 Wisp. 17 Schfl. $11\frac{7613}{9900}$.

Von den 4 Wochen eines Monats war der Marktpreis für den Scheffel Roggen

1 Thlr.	19 Sgr.	— Pf.
1 =	20 =	6 =
1 =	17 =	3 =
1 =	28 =	7 =

Wie hoch war der Durchschnittspreis für den ganzen Monat?
Antw. 1 Thlr. 21 Sgr. 4 Pf.

In einem Orte war der Barometerstand

im Jan.	330,71'''
Febr.	329,47
März	334,79
April	331,81
Mai	328,09
Juni	331,51
Juli	335,71
Aug.	337,14
Sept.	334,51
Octbr.	331,9
Nov.	327,11
Dec.	328,13

Wie viel beträgt der mittlere Barometerstand des ganzen Jahres?
Antw. 331,74'''

II. Geometrische Proportionen.

6) Gegeben $a = 4$ $b = 12$ $c = 7$ dann ist $d = 21$.
$a = 6\frac{1}{2}$ $b = 9\frac{3}{4}$ $c = 34$ dann ist $d = 51$.
$a = 21\frac{3}{4}$ $b = 3\frac{1}{2}$ $d = 3\frac{8}{9}$ dann ist $c = 24\frac{1}{6}$.
$a = 5\frac{1}{3}$ $b = 12$ $d = 16\frac{1}{2}$ dann ist $c = 7\frac{1}{3}$.
$a = 441$ $c = 73\frac{1}{2}$ $d = 16\frac{7}{8}$ dann ist $b = 101\frac{1}{4}$.
$a = \frac{9}{11}$ $c = 1\frac{8}{19}$ $d = 22$ dann ist $b = 12\frac{2}{3}$.
$b = 9\frac{1}{3}$ $c = 16\frac{1}{14}$ $d = 42$ dann ist $a = 3\frac{4}{7}$.
$b = 9,1$ $c = 4,5$ $d = 6,75$ dann ist $a = 6,6$.
$a = 7,5$ $b = 8,25$ $c = 31,8[3]$ dann ist $d = 35,01[6]$.
$a = 21\frac{1}{2}$ $b = 17\frac{3}{4}$ $d = 9\frac{2573}{3698}$ dann ist $c = 11\frac{32}{43}$.
$a = 5,1$ $c = 0,09$ $d = 0,06$ dann ist $b = 3,4$.
$b = 15$ $c = 41\frac{1}{3}$ $d = 19\frac{1}{13}$ dann ist $a = 32\frac{1}{2}$.

7) Die dritte geometrische Proportionale einer stetigen Proportion zu finden

zu 42 und 91? A. $197\frac{1}{6}$.
zu $9\frac{3}{5}$ und $21\frac{1}{3}$? A. $47\frac{11}{27}$.

zu $6\frac{1}{4}$ und $1\frac{1}{5}$? A. $\frac{144}{625}$.
zu $16\frac{7}{8}$ und $5\frac{1}{4}$? A. $1\frac{19}{30}$.
zu $9\frac{31}{32}$ und $11\frac{11}{12}$? A. $14\frac{64}{261}$.
zu 3,3 und 5,61? A. 9,537.

8) Die mittlere geometrische Proportionale zu finden zu
225 und 961? A. 465.
$41\frac{1}{3}$ und $11\frac{3}{4}$? A. 22,0378...
4,5 und $4\frac{1}{3}$? A. 4,415881...
$218\frac{3}{4}$ und $18\frac{37}{45}$? A. $64\frac{1}{6}$.
$8\frac{46}{63}$ und $3\frac{1}{7}$? A. $5\frac{5}{21}$.
32 und 0,98? A. 5,6.
4,5 und 3,12? 3,747...

III. Einfache Proportionsrechnung.

9) $\frac{5}{8}$ Ctr. kosten 8 Thlr. 10 Sgr.; was kosten $6\frac{7}{8}$ Pfd.? Antw. 25 Sgr.

10) $3\frac{1}{4}$ Schfl. kosten $4\frac{3}{4}$ Thlr.; was kosten $4\frac{5}{6}$ Wispel? A. $169\frac{7}{13}$ Thlr.

11) Mit 7 Pfd. reicht man $1\frac{1}{8}$ Monat; wie lange mit $3\frac{1}{2}$ Ctr.? A. 5 Jahre $1\frac{7}{8}$ Monat.

12) Wenn Jemand täglich 19 Sgr. $9\frac{1}{2}$ Pf. ausgiebt, so reicht er mit seinem Gelde $10\frac{1}{2}$ Monat; wenn er nur 10 Monate reichen wollte, wie viel könnte er da täglich ausgeben? A. 20 Sgr. $9\frac{3}{8}$ Pf.

13) Unter 50 Arme wird Geld vertheilt und jeder erhält im Durchschnitt 5 Thlr. 13 Sgr. $8\frac{1}{4}$ Pf.; wie viel könnten es Arme sein, wenn jeder im Durchschnitt 4 Thlr. 16 Sgr. $4\frac{7}{8}$ Pf. erhielte? A. 60 Arme.

14) 1 Pfd. 24 Lth. $2\frac{5}{8}$ Qt. kosten 26 Sgr. 3 Pf.; was kosten 3 Ctr. 90 Pfd. 6 Lth. $1\frac{2}{3}$ Qt.? A. 207 Thlr. 20 Sgr.

15) 5 Wisp. $11\frac{1}{4}$ Schfl. kosten 329 Thlr. 22 gGr. $10\frac{23}{40}$ Pf. was kosten $2\frac{1}{12}$ Wisp.? A. 125 Thlr. 16 gGr. $8\frac{3}{5}$ Pf.

16) 30 Ctr. 7 Pfd. 28 Lth. $2\frac{1}{6}$ Qt. kosten 428 Thlr. 23 Sgr. $3\frac{1}{80}$ Pf.; was kosten 15 Ctr. 3 St. 2 Pfd. 12 Lth. $1\frac{1}{3}$ Qt.? 222 Thlr. 22 Sgr. $2\frac{1}{2}$ Pf.

17) $2\frac{1}{4}$ Schfl. Roggen geben 1 Ctr. 4 St. 8 Pfd. Mehl; wie viel bekommt man von $15\frac{3}{4}$ Schfl.? A. 13 Ctr. 12 Pfd.

18) Eine Waare verliert durchs Reinigen $8\frac{1}{3}$ pr.; wie viel ungereinigte Waare muß man nehmen, um $35\frac{3}{4}$ Ctr. gereinigte zu erhalten? A. 39 Ctr.

19) Wie viel gereinigte würde man aber dann aus $17\frac{1}{7}$ Ctr. ungereinigter bekommen? A. $15\frac{5}{7}$ Ctr.

20) Als ein Scheffel Korn 1 Thlr. 4 Sgr. 3 Pf. kostete, wog ein Zweigroschenbrot 1 Pfd. $13\frac{1}{2}$ Lth.; wie viel muß es wiegen, wenn der Scheffel 1 Thlr. 15 Sgr. 8 Pf. kostet? A. 1 Pfd. $2\frac{1}{8}$ Lth.

21) Setzt man auf einer Straße die Bäume $3\frac{1}{2}$° auseinander, so gebraucht man 2000; wie viel, wenn man sie 4° auseinander setzt? A. 1750.

22) 60 Arbeiter arbeiten an einem Gebäude 9 Wochen $4\frac{1}{2}$ Tag; wie lange 50 Arbeiter? A. 11 Wochen 4 Tage.

23) Wer täglich $4\frac{1}{2}$ Meile geht, braucht zu einer Reise 3 Wochen 4 Tage; wie lange, wenn er täglich $5\frac{1}{4}$ Meile ginge? A. 3 Wochen $\frac{3}{7}$ Tag.

24) Für 57 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf. erhält man 7 Ctr. 1 Pfd. $31\frac{1}{3}$ Lth.; wie viel für 16 Thlr. 4 Sgr. $7\frac{3}{5}$ Pf.? A. 1 Ctr. 106 Pfd. $4\frac{14}{15}$ Lth.

IV. Zusammengesetzte Proportionsrechnung.

25) 720 Arbeiter können in 51 Tagen einen Wall von 648′ Länge, 8′ Breite und $6\frac{2}{3}$′ Höhe aufwerfen; einen wie viel Fuß langen Wall werden 850 Arbeiter in 46 Tagen aufwerfen können, wenn er $11\frac{1}{2}$′ breit und $6\frac{2}{5}$′ hoch sein soll? A. 500′.

26) Jemand geht in 2 Sekunden 5 Schritte, 9 Schritte von ihm messen 20′; er braucht $5\frac{1}{4}$ Stunde zu einem gewissen Wege; ein Anderer geht in 8 Sekunden 15 Schritte, 3 seiner

Schritte messen 7′, wie lange braucht dieser zu demselben Wege? A. 6$_{2}$ Stunde.

27) 4000 Mann haben auf 15 Wochen Proviant, wenn jeder täglich 2 Pfd. Brot und $\frac{3}{4}$ Pfd. Fleisch bekommt; wie viel kann jeder täglich nur erhalten, wenn noch 1000 Mann dazu kommen und sie 20 Wochen reichen sollen? A. 1$\frac{1}{5}$ Pfd. Brot und $\frac{9}{20}$ Pfd. Fleisch.

28) Eine Stadt von 4500 Häusern braucht für Straßenerleuchtung auf 8$\frac{1}{2}$ Monat, wenn im Durchschnitt die Erleuchtung täglich 6 Stunden dauert, 3402 Thlr., wenn immer 3 Laternen auf 20 Häuser kommen und 5 Laternen stündlich 2 Kannen Oel brauchen; wie viel Thaler würde eine Stadt von 5100 Häusern brauchen, wenn die Erleuchtung nur 7$\frac{1}{2}$ Monate, täglich im Durchschnitte 6$\frac{2}{3}$ Stunde dauern sollte, auf 35 Häuser 6 Laternen kämen, 4 Kannen Oel aber stündlich zu 9 Laternen nöthig wären? A. 4800 Thlr.

29) 6 Schriftsetzer setzen in 5 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten, 27 Bogen, wenn auf den Bogen 16 Seiten, auf die Seite 30 Zeilen, auf die Zeile 50 Buchstaben kommen; wie viel Bogen werden 5 Schriftsetzer in 7 Tagen setzen können, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten, der Bogen aber nur 12 Seiten, die Seite 40 Zeilen, die Zeile 63 Buchstaben enthält? A. 20 Bogen.

30) Wenn man in 4 Stunden 2$\frac{1}{2}$ Meile fährt, so kommt man in 20$\frac{1}{3}$ Stunden nach Z; wie viel Meilen muß man in 1 Stunde fahren, um in 10$\frac{1}{6}$ Stunden in Z anzukommen? A. 1$\frac{1}{4}$ Meile.

31) Jemand, der mit 5 Schritten 7′ zurücklegt und in 3$\frac{1}{2}$ Sekunde 6 Schritte macht, braucht 3 Stunden 20 Minuten, um in Z anzukommen; ein Anderer, der in 2$\frac{1}{2}$ Sekunden 4 Schritte macht, will in 3 Stunden nach Z kommen; wie große Schritte muß dieser machen? A. Er muß mit 1 Schritte 1$\frac{2}{3}$′ oder mit 3 Schritten 5′ zurücklegen.

32) Mit 7 Mahlgängen werden in 4 Tagen, wenn sie täglich 16$\frac{1}{2}$ Stunden im Gange sind, 210 Scheffel gemahlen;

Staatliche Bibliothek

in wie viel Tagen werden 8 Mahlgänge, wenn sie 22 Stunden täglich im Gange sind, 240 Scheffel mahlen? A. In 3 Tagen.

33) Kostet der Scheffel Hafer 25 Sgr., so kann man mit einer gewissen Summe 26 Pferde $1\frac{1}{4}$ Jahr lang erhalten, wenn jedes täglich $3\frac{1}{2}$ Metze erhält; wie lange wird man 21 Pferde mit demselben Gelde erhalten können, wenn der Hafer à Scheffel $17\frac{1}{2}$ Sgr. kostet, jedes Pferd aber täglich $4\frac{1}{3}$ Metze erhält? A. $1\frac{1}{11}$ Jahre.

V. Einfache Zinsrechnungen.

34) Wie viel geben 5550 Thlr. in $3\frac{1}{4}$ Jahren zu $7\frac{1}{2}$ pr. Interessen? A. $1352\frac{13}{16}$ Thlr.

35) In welcher Zeit geben 3600 Thlr. zu 4 pr. 700 Thlr. Interessen? A. In $4\frac{31}{36}$ Jahren.

36) Welches Kapital giebt in $6\frac{1}{4}$ Jahren zu $3\frac{1}{2}$ pr. 1400 Thlr. Interessen? A. 6400 Thlr.

37) Zu welchem Zinsfuße müssen 9800 Thlr. ausgeliehen werden, um in $5\frac{1}{3}$ Jahren 2380 Thlr. Zinsen zu bringen? A. Zu $4\frac{31}{56}$ pr.

38) Was betragen die Interessen von 6450 Thlrn. zu $3\frac{1}{3}$ pr. in $2\frac{1}{2}$ Jahren? A. $537\frac{1}{2}$ Thlr.

39) In welcher Zeit geben 780 Thlr. zu 4 pr. 260 Thlr. Interessen? A. In $8\frac{1}{3}$ Jahren.

40) Zu welchem Zinsfuße geben 840 Thlr. in $3\frac{3}{4}$ Jahren $141\frac{3}{4}$ Thlr. Interessen? A. Zu $4\frac{1}{2}$ pr.

41) Welches Kapital giebt in 3 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ pr. 910 Thlr. Interessen? A. 8666,[6] Thlr.

42) Wenn 4550 Thlr. in $3\frac{1}{2}$ Jahren 690 Thlr. $2\frac{1}{2}$ Sgr. Interessen geben, welches Kapital wird dann zu demselben Zinsfuße in $6\frac{2}{3}$ Jahren 2600 Thlr. Interessen geben? A. 9000 Thlr.

43) Ein Kaufmann kauft 14 Ctr. Zucker für 280 Thlr. und verkauft das Pfund mit 7 Sgr. 4 Pf.; wie viel pr. verdient er dabei? A. $34\frac{2}{5}$ pr.

44) Ein Kaufmann kauft 12 Ctr. für 112 Thlr.; für Fracht Steuer u. s. w. muß er noch auf 7 Ctr. $10\frac{1}{2}$ Thlr. bezahlen; wie theuer muß er das Pfd. verkaufen, wenn er 35 pr. daran verdienen will? A. $3\frac{87}{88}$ Sgr.

45) Was ist der künftige Werth von 8640 Thlrn. in $3\frac{1}{2}$ Jahren zu 5 pr.? A. 10152 Thlr.

46) Was ist der künftige Werth von 933 Thlrn. 10 Sgr. in $2\frac{1}{2}$ Monat zu 6 pr.? A. 945 Thlr.

47) Was ist der jetzige Werth von $458\frac{1}{8}$ Thlr., welche erst in 5 Monaten gefällig sind, wenn der Zinsfuß zu $4\frac{1}{3}$ pr. gerechnet wird? A. 450 Thlr.

48) Jemand schreibt den 16. März einen Wechsel auf 2430 Thlr. zahlbar den 1. August; wie viel beträgt (zu $3\frac{1}{3}$ pr.) das Disconto? A. 30 Thlr.

49) Jemand discontirt den 1. April einen Wechsel, der den 16. Nov. zahlbar und auf 1870 Thlr. geschrieben ist; wie viel beträgt das Disconto (zu $3\frac{1}{3}$ pr.)? A. $36\frac{2}{3}$ Thlr.

50) Jemand schreibt den 1. Mai einen Wechsel auf 1900 Thlr., zahlbar den 1. Sept.; wie viel beträgt der jetzige Werth (zu 4 pr.)? A. 1875 Thlr.

51) Den 1. März 1831 discontirt Jemand einen Wechsel, zahlbar den 1. Januar 1832, auf 7530 Thlr. (zu $5\frac{1}{2}$ pr.); wie viel beträgt das Disconto? A. 330 Thlr.

52) Was ist der künftige Werth von 720 Thlrn. in 3 Jahren zu 5 pr.? A. 828 Thlr.

53) Was der jetzige Werth von 720 Thlrn., die erst in 3 Jahren gefällig sind, zu 5 pr.? A. $626\frac{2}{23}$ Thlr.

VI. Reductionsrechnung.

54) Wie viel sind 1 Sgr. preuß. Cour. in Kreuzern, wenn 14 preuß. Thlr. eine feine Mark, 1 Thlr. = 30 Sgr., eine feine Mark = 20 Guld., 1 Guld. = 60 Kreuzer? A. $2\frac{6}{7}$ Kr.

55) Wie viel, wenn eine feine Mark zu 24 Gulden ausgeprägt ist? A. $3\frac{3}{7}$ Kr.

56) Auf den neuen Zweithalerstücken steht: 2 Thlr. = $3\frac{1}{2}$ Gulden; wie viel gilt nun 1 Sgr. in Kreuzern, von denen auch 60 einen Gulden ausmachen? A. $3\frac{1}{2}$ Kr.

57) Zu wie viel solcher Gulden ist demnach eine feine Mark ausgeprägt? A. Zu $24\frac{1}{2}$ Gulden.

58) Wie viel sind 1000 Rubel in preuß. Thlrn., wenn 6 Ducaten = 17 sächs. Thlr., 14 Rubel = 5 Ducaten, 100 sächs. Thlr. aber = 105 preuß. Thlr sind? A. $1062\frac{1}{2}$ Thlr.

59) Wie viel Piaster sind 100 pr. Thlr., wenn 20 Gulden = 14 Thlr., $17\frac{1}{2}$ Gulden = 7 Piaster sind? A. $51\frac{1}{7}$ P.

60) Wie viel machen 1000 Stück holländ. Ducaten in sächsischem Gelde, wenn 1 Duc. = $5\frac{1}{5}$ holländ. Cour.-Gulden, 105 holl. Cour.-Gulden = 100 Gulden holländ. Banko, und 250 G. h. B. = $140\frac{1}{4}$ sächs. Thlr. sind? A. $2778\frac{2}{7}$ sächs. Thlr.

61) Wenn 1 berliner Metze 24 Sgr. kostet, wie viel sächs. Thlr. kosten 20 dresdner Metzen, wenn 15 berl. Metzen = 8 dresdner, 100 sächs. Thlr. = 105 preuß. Thlr. sind? A. $28\frac{4}{7}$ Thlr.

62) Wie viel berliner Ellen sind $147\frac{1}{5}$ brabanter Ellen, wenn 613 französ. Linien = 2 brab. Ellen, 144 fr. Linien = 1 franz. Fuß und $10\frac{1}{12}\frac{0}{}$ franz. Fuß = 5 berliner Ellen sind? A. $153\frac{1}{4}$ berl. Ellen.

63) Ein Kaufmann giebt 8 Lth. gebrannten Kaffé für 2 Sgr. 11 Pf.; wie viel kosten ihm 2 Ctr. ungebrannter Kaffé, wenn das Pfund beim Brennen 8 Lth. verliert? A. $64\frac{1}{6}$ Thlr.

64) Eine preuß. Meile enthält 24000 pr. Duodecimalfuße, $14\frac{7}{8}$ pr. M. sind = 15 geogr. M.; wie viel preuß. Duodecimalfuße gehen daher auf eine geographische Meile? A. 23800.

65) Wie viel Sgr. kommen auf einen Frank, da 20 Fr. = $5\frac{1}{6}$ sächs. Thlr., 20 sächs. Thlr. = 21 pr. Thlr. sind? A. $8\frac{1}{80}$ Sgr.

66) Wie viel Mariengroschen hat 1 Laubthaler, wenn 4 Laubthlr. = $5\frac{1}{2}$ Thlr., 1 Thlr. = 24 gGr. und 2 gGr. = 3 Mariengroschen sind? A. $49\frac{1}{2}$ Mariengroschen.

67) Wenn 1 Loth $11\frac{1}{4}$ Sgr. kostet, wie viel Thlr. werden dann 40 Pfd. gelten? A. 40 Thlr.

VII. Repartitionsrechnung.

68) 1317 soll nach den Verhältnißzahlen 3 7 11 getheilt werden; die Theile sind: $188\frac{1}{7}$ 439 $689\frac{6}{7}$.

360 soll nach den Verhältnißzahlen 1 3 5 7 9 11 getheilt werden: 10 30 50 70 90 110.

1100 nach den Verhältnißzahlen 4 5 6 7: 200 250 300 350.

234 nach den Verhältnißzahlen 7 5 3 9: $68\frac{1}{4}$ $48\frac{3}{4}$ $29\frac{1}{4}$ $87\frac{3}{4}$.

424 nach den Verhältnißzahlen 100 50 9: $266\frac{2}{3}$ $133\frac{1}{3}$ 24.

1838 nach den Verhältnißzahlen 20 30 $35\frac{1}{2}$ $6\frac{2}{5}$: 400 600 710 128.

4300 nach den Verhältnißzahlen 2,1 3,2 4,3 5,4 6,5: 420 640 860 1080 1300.

324 nach den Verhältnißzahlen 2,21 5,7 7,97 20,12: 19,89 51,3 71,73 181,08.

69) Vier setzen zusammen in die Lotterie, A giebt $3\frac{1}{2}$ Thlr., B 4 Thlr., C 5 Thlr., D $5\frac{1}{2}$ Thlr. zum Einsatz; sie gewinnen 9000 Thlr.; wie viel erhält jeder? A. A 1750 Thlr. B 2000 Thlr., C 2500 Thlr., D 2750 Thlr.

70) Wenn im Pulver auf 100 Theile Salpeter 18 Theile Schwefel und 20 Theile Kohle kommen, wie viel braucht man von jedem zu 15 Ctr. Pulver? A. $10\frac{20}{23}$ Ctr. Salpeter, $1\frac{22}{23}$ Ctr. Schwefel, $2\frac{4}{23}$ Ctr. Kohle.

71) Den 1. Sept. 1830 fängt A mit 1000 Thlrn. ein Geschäft an, den 1. Febr. 1831 tritt B mit 800 Thlrn., den 1. Juli 1831 C mit 2000 Thlrn., den 1. October 1832 D mit 2400 Thlrn. dem Geschäfte bei; als am 1. März 1833 das Geschäft aufhört, ergiebt sich ein Gewinn von 15300 Thlrn.; wie viel bekommt jeder? A. A 4500 Thlr., B 3000 Thlr., C 6000 Thlr., D 1800 Thlr.

72) Drei Fuhrleute fahren Steine; A thut 28 Fuhren mit 1 Pferde, B 35 Fuhren mit 2 Pferden, C 42 Fuhren mit

3 Pferden; sie erhalten zusammen 50 Thlr. und sollen diese nach Verhältniß der Anzahl der Fuhren und Pferde vertheilen; wie viel erhält jeder? A. A $6\frac{1}{4}$ Thlr., B $15\frac{5}{8}$ Thlr., C $28\frac{1}{8}$ Thlr.

73) 1000 Thlr. sollen unter 4 so getheilt werden, daß jeder folgende noch einmal so viel erhält, als der vorhergehende; wie müssen dieselben vertheilt werden? A. A bekommt $66\frac{2}{3}$ Thlr., B $133\frac{1}{3}$ Thlr., C $266\frac{2}{3}$ Thlr., D $533\frac{1}{3}$ Thlr.

VIII. Alligationsrechnung.

74) Drei Sorten Wein und zwar 6 Flaschen à 17 Sgr., 8 Flaschen à 20 Sgr., 10 Flaschen à 21 Sgr. werden gemischt. Wie viel muß man zu einer Flasche der neuen Sorte von jeder der drei Sorten nehmen? Was kostet eine Flasche der neuen Sorte? A. Von der ersten Sorte muß man $\frac{1}{4}$ Flasche, von der zweiten $\frac{1}{3}$ Flasche, von der dritten $\frac{5}{12}$ Flasche nehmen und eine Flasche der Mischung kostet $19\frac{2}{3}$ Sgr.

75) Wenn 3 Flaschen à 20 Sgr., 4 Flaschen à $18\frac{1}{2}$ Sgr. und 2 Flaschen à $17\frac{1}{2}$ Sgr. gemischt werden, wie hoch ist dann der Preis der Mischung? A. $18\frac{7}{9}$ Sgr.

76) Wie viel müssen zu 25 Flaschen à $12\frac{1}{2}$ Sgr. Flaschen à $17\frac{1}{2}$ Sgr. gemischt werden, damit eine Flasche des Gemisches 16 Sgr. koste? A. $58\frac{1}{3}$ Fl.

77) Wie viel aber würde das Gemisch werth sein, wenn man zu jenen 25 Flaschen à $12\frac{1}{2}$ Sgr. noch 30 Flaschen à 20 Sgr. mischte? A. Die Flasche $16\frac{13}{22}$ Sgr.

78) Wie viel müßte man zu jenen 25 Flaschen Wasser gießen, wenn die Mischung à Flasche 10 Sgr. werth sein sollte? A. $6\frac{1}{4}$ Flasche.

79) Wenn man aber aus jener Sorte à $12\frac{1}{2}$ Sgr. und einer andern Sorte à 16 Sgr. 35 Flaschen à $13\frac{1}{2}$ Sgr. machen wollte, wie viel müßte man von jeder der beiden Sorten nehmen? A. Von der ersten 25 Flaschen, von der zweiten 10 Flaschen.

80) Aus 14löthigem und 11löthigem Silber sollen 5 Pfd. $12\frac{1}{3}$löthiges gemacht werden; wie viel muß man von jeder der beiden Sorten nehmen? A. Vom ersten $2\frac{2}{9}$ Pfd., vom zweiten $2\frac{7}{9}$ Pfd.

81) Sollte man aber aus 14= und 11löthigem Silber $12\frac{3}{4}$löthiges machen, vom 14löthigen Silber hätte man 7 Pfd. genommen; wie viel Pfd. müßte man vom 11löthigen nehmen? A. 5 Pfd.

82) Man mischt 3 Pfd. 10löthiges, 5 Pfd. 11löthiges, 6 Pfd. $12\frac{1}{2}$löthiges, 9 Pfd. 13löthiges Silber; wievíellöthiges wird das Ganze? A. $12\frac{1}{23}$löthiges.

83) Ein Kaufmann hat Tabak das Pfd. zu $12\frac{1}{2}$ Sgr.; da diese Sorte schlecht abgeht, so will er die noch übrigen 720 Pfd. mit Tabak à $8\frac{1}{3}$ Sgr. mischen, um eine Sorte à $10\frac{1}{4}$ Sgr. zu erhalten; wie viel Pfd. muß er von der zweiten Sorte nehmen? A. $925\frac{5}{7}$ Pfd.

84) Wollte er aber aus der Sorte à $12\frac{1}{2}$ Sgr. und $8\frac{1}{2}$ Sgr. 480 Pfd. Tabak à 10 Sgr. machen, wie viel müßte er da von jeder dieser Sorten nehmen? A. Von der ersten Sorte 180 Pfd. von der zweiten 300 Pfd.

85) Wenn er aber seinen ganzen Vorrath à $12\frac{1}{2}$ Sgr. mit 500 Pfd. der Sorte à $8\frac{1}{2}$ Sgr. mischt, wie theuer wird da ein Pfd. der Mischung sein? A. $10\frac{105}{122}$ Sgr.

IX. Einige Beispiele, bei denen Größen vorkommen, welche im Verhältnisse der zweiten oder dritten Potenzen anderer Größen stehen.

86)*) Die Seite einer Figur ist 3′ lang, die ihr entsprechende Seite einer ähnlichen Figur ist nur 2′ lang; wenn nun

---

*) Aehnliche Figuren verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie die Quadrate von ein Paar gleichliegenden Seiten, so daß, wenn F und f die Flächenräume zweier ähnlichen Figuren und A und a zwei gleichliegende Seiten in diesen Figuren bedeuten, man die Proportion hat: $F : f = A^2 : a^2$, woraus wieder $\sqrt{F} : \sqrt{f} = A : a$.

die erstere Figur 45□′ Inhalt hätte, wie viel Inhalt würde die zweite Figur haben? A. 20□′.

87) Eine Figur habe $7\frac{1}{2}$□′ Inhalt, eine Seite in ihr sei $\frac{3}{4}$′ lang; eine gleichliegende Seite in einer der ersten ähnlichen Figur sei $6\frac{1}{4}$′ lang; wie groß ist dann der Inhalt dieser Figur? A. $520\frac{5}{6}$□′.

88) Eine Figur, deren Seite 5′ lang ist, hat einen Flächenraum von 175□′; man wünscht eine dieser ähnliche Figur zu haben, welche 252□′ Flächenraum hat; es fragt sich, wie lang muß in ihr die Seite sein, welcher der Seite von 5′ in der andern Figur entspricht? A. 6′.

89) Eine Figur hat einen Flächenraum von 25□′ und eine ihrer Seiten ist 15′ lang; man wünscht eine der gegebenen ähnliche Figur von 17□′ Flächeninhalt; es fragt sich, wie lang die Seite in ihr sein muß, welche jener Seite von 15′ in der erstern entspricht? A. 12,36931...′

90)*) Ein Kreis mit dem Radius 1′ hat einen Inhalt von 3,14159265...□′, wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Radius 30′ ist? A. 2827,43338...□′

91) Ein Kreis hat einen Radius von 3′,4, wie groß ist sein Inhalt? A. 36,3168...□′

92) Ein Kreis hat einen Flächenraum von 42,4291588□°, wie groß ist sein Radius? A. 3°,675.

93) Die Fläche eines Kreises sei 47□′, wie groß ist der Radius desselben? A. 3′,867889...

94)**) Eine Fläche, welche von einem Lichte 3′ absteht, erhalte von demselben eine Lichtstärke, die gleich 1 gesetzt werden soll; eine wie große Lichtstärke erhält dann eine Fläche, welche

---

*) Die Flächenräume von zwei Kreisen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Radien.

**) In der Optik wird gezeigt, daß die Lichtstärke nach dem Verhältnisse des Quadrats der Entfernung vom leuchtenden Punkte abnimmt.

1′ nur von dem Lichte entfernt ist? A. Eine Lichtstärke, die = 9 zu setzen ist.

95) Wie verhalten sich die Intensitäten der Beleuchtung zweier Flächen zu einander, von denen die eine $4\frac{1}{2}$, die andere $5\frac{1}{2}$ Fuß vom Lichte absteht? A. Wie 81 : 121.

96) Eine Fläche steht von einem Lichte 12′ ab, wie weit muß eine andere Fläche abstehen, um 4mal stärker beleuchtet zu werden? A. 6′.

97) Wie weit aber, um 7mal stärker beleuchtet zu werden? A. 4′,53657...

98)*) In einer Sekunde fällt ein Körper $15\frac{5}{8}$ pr. Fuß; wie viel in 6 Sekunden? A. $562\frac{1}{2}$.

99) Wie viel in $3\frac{1}{5}$ Sekunde? A. 160.

100) In welcher Zeit fällt er 250 Fuß? A. In 4 Sek.

101) In welcher Zeit 300 Fuß? A. In 4,38178... Sek.

102)**) Wenn der Radius einer Kugel 1′ lang ist, so enthält die Kugel 4,1887902... Cubikfuß; wie viel Cubikfuß wird eine Kugel enthalten, deren Radius $2\frac{1}{2}$′ ist? A. 65,4498 Cbkfuß.

103) Wie groß muß der Radius einer Kugel sein, wenn der Cubikinhalt derselben 473 Cubikfuß ist? A. 4′,8334...

104)***) Die Erde, welche 20600000 Meilen von der Sonne entfernt ist, bewegt sich in etwa 365 Tagen um dieselbe; wenn nun ein Planet in 2 Jahren 137 Tagen um die Sonne

---

*) Das Gesetz bei dem freien Falle der Körper ist: Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, so daß, wenn F und f die in den Zeiten T und t durchlaufenen Räume bedeuten, man folgende Proportion hat: $F : f = T^2 : t^2$.

**) Die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich zu einander, wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

***) Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich zu einander, wie die dritten Potenzen ihrer Entfernungen von der Sonne. [Drittes Keppler'sches Gesetz.]

ginge, wie weit würde er dann von derselben entfernt sein? A. 36673411 Meilen.

105) Welche Umlaufszeit aber würde ein Planet haben, der nur 2000000 Meilen von der Sonne entfernt wäre? A. 0,0302513 Jahr = 11,04173 Tage.

Achtes Kapitel.

Rechnung mit Buchstabenausdrücken, in welchen nur Potenzen mit ganzen positiven Exponenten vorkommen.

I. Addition.

1)
$$\begin{array}{r} -16a \\ +7a \\ -3a \\ +5a \\ -9a \\ -7a \\ +a \\ +4a \\ +10a \\ \hline -8a \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 1\frac{3}{4}b \\ -3\frac{1}{2}b \\ -2\frac{1}{3}b \\ +5\frac{2}{5}b \\ -6\frac{1}{6}b \\ +9\frac{1}{4}b \\ -\frac{2}{5}b \\ \hline +4b \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 2\frac{1}{2}a \\ -4\frac{1}{3}a \\ -5\frac{1}{8}a \\ +6\frac{3}{4}a \\ +8\frac{5}{6}a \\ \hline +8\frac{5}{8}a \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 5\frac{7}{9}b \\ +6\frac{1}{2}b \\ -5\frac{3}{4}b \\ +\frac{1}{3}b \\ -9\frac{4}{5}b \\ -7\frac{3}{10}b \\ \hline -10\frac{43}{180}b \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 5\frac{1}{4}a \\ +9\frac{3}{8}a \\ -7\frac{1}{3}a \\ -1\frac{2}{5}a \\ +3\frac{1}{3}a \\ \hline +9\frac{9}{40}a \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r} 9\frac{7}{10}x \\ -4\frac{3}{4}x \\ -12\frac{3}{7}x \\ +1\frac{1}{2}x \\ -3\frac{5}{9}x \\ \hline -9\frac{673}{1260}x \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} 3a \\ -4a \\ +a \\ \hline 0 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{r} 5\frac{1}{3}x \\ -x \\ +\frac{1}{2}x \\ \hline +4\frac{5}{6}x \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r} -a \\ -2a \\ +2a \\ \hline -a \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{r} -11\frac{1}{2}y \\ +7\frac{1}{3}y \\ +5\frac{1}{6}y \\ \hline +y \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{r} a + 3b - 5c + d \\ -3a - 2b + c - 6d \\ 5a - 16b - 3c + 10d \\ \hline 3a - 15b - 7c + 5d \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{r} 1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{7}a - \frac{1}{8}b + \frac{1}{9}c - \frac{1}{10}d \\ \frac{1}{11} - \frac{1}{12}a + \frac{1}{13}b - \frac{1}{14}c + \frac{1}{15}d \\ \hline \frac{61}{66} - \frac{37}{84}a + \frac{89}{312}b - \frac{53}{252}c + \frac{1}{6}d \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{r} 4a - 3b + c - 5d + e + 3f - g \\ -2a - 5b + 7c - 3d - 5e + 3g - h \\ 5a - 4c + d + 16e - 2f + 5h - l \\ -7a + 11b - 2d + 5f - 10g + 7l \\ 12a + 3b - 9c - d - 11e + 7f + 6g - 2h - 9l \\ \hline 12a + 6b - 5c - 10d + e + 13f - 2g + 2h - 3l \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{2}a - 2b + c + 4\frac{1}{3}d - e + \frac{1}{2}f + \frac{2}{3}g \\ -\frac{3}{5}a - 4\frac{1}{5}b - c + 3d - \frac{1}{6}f - h \\ \frac{6}{7}a + \frac{3}{4}b - 6\frac{1}{2}d + 5e - 3f + 2g \\ \frac{3}{4}a - 2\frac{7}{10}b + 3c - \frac{1}{3}d - e + \frac{2}{3}f + 3h - i \\ -2\frac{5}{6}a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d + 2e - 4g + 3i \\ \hline 2\frac{283}{420}a - 8\frac{3}{20}b + 2\frac{1}{2}c + 5e - 2f - 1\frac{1}{3}g + 2h + 2i \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{r} 3a - 2\frac{1}{2}b - c + 3\frac{1}{3}d + 5e - 2f - 2\frac{3}{4}g \\ 2\frac{1}{2}a - 5\frac{2}{3}b - 3c - 7\frac{1}{4}d - \frac{1}{2}e + \frac{7}{8}g - \frac{2}{3}h \\ 11\frac{3}{5}a - 5b + 3\frac{1}{2}c - \frac{2}{3}d - 7e + f - \frac{1}{3}g + 3h \\ -15a - \frac{3}{7}c + \frac{2}{5}d - \frac{1}{5}e + 7f - \frac{1}{2}h \\ a + b - \frac{1}{2}c + 3e - 2\frac{1}{4}f + g - \frac{2}{5}h \\ \hline 3\frac{1}{10}a - 12\frac{1}{6}b - 1\frac{3}{7}c - 4\frac{11}{60}d + \frac{3}{10}e + 3\frac{3}{4}f - 1\frac{5}{24}g + 1\frac{13}{30}h \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{r} a - b \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{9}b \\ -\frac{1}{8}a + \frac{1}{27}b \\ \frac{1}{16}a - \frac{1}{81}b \\ \hline \frac{11}{16}a - \frac{61}{81}b \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}a + \frac{1}{3}b - \frac{5}{6}c \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b - \frac{3}{4}c \\ -7a - \frac{1}{2}b - \frac{7}{8}c \\ \hline -5\frac{3}{20}a - \frac{1}{12}b - 2\frac{1}{3}c \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{9}a - 4\frac{1}{6}b + 3\frac{4}{5}c - d - \frac{1}{2}e + 3\frac{2}{9}f - 5g \\ 6\frac{1}{2}a + 7\frac{1}{4}b - \frac{6}{11}c - \frac{3}{5}d + 3\frac{1}{2}e - 3\frac{1}{4}g \\ -2\frac{2}{5}a - 7\frac{3}{8}b + 7\frac{2}{7}c - \frac{3}{5}d + 6\frac{1}{2}f \\ 9\frac{3}{4}a - 6\frac{3}{5}c + \frac{1}{2}d - e - f + \frac{5}{6}g \\ 1\frac{1}{10}a - 6\frac{1}{3}b - \frac{13}{5}c - \frac{3}{4}e + 7f - g \\ \hline 18\frac{11}{180}a - 10\frac{5}{8}b + 3\frac{219}{385}c - 1\frac{7}{10}d + 1\frac{1}{4}e + 15\frac{13}{18}f - 8\frac{5}{12}g \end{array}$$

II. Subtraction.

1) $\begin{array}{r} 3x \\ 5x \\ \hline -2x \end{array}$
2) $\begin{array}{r} -7y \\ -2y \\ \hline -5y \end{array}$
3) $\begin{array}{r} +3a \\ -5a \\ \hline +8a \end{array}$
4) $\begin{array}{r} -7a \\ +2a \\ \hline -9a \end{array}$
5) $\begin{array}{r} 9c \\ -5c \\ \hline +14c \end{array}$
6) $\begin{array}{r} 6y \\ 7y \\ \hline -\ y \end{array}$

7) $\begin{array}{r} 9y \\ -7y \\ \hline 16y \end{array}$
8) $\begin{array}{r} -41\frac{1}{2}x \\ -\ 2\frac{1}{3}x \\ \hline -39\frac{1}{6}x \end{array}$
9) $\begin{array}{r} 1\frac{1}{4}y \\ -2\frac{1}{3}y \\ \hline +3\frac{7}{12}y \end{array}$
10) $\begin{array}{r} 5\frac{3}{4}x \\ 1\frac{1}{2}x \\ \hline 4\frac{1}{4}x \end{array}$
11) $\begin{array}{r} -3\frac{2}{7}y \\ +3\frac{3}{4}y \\ \hline -7\frac{1}{28}y \end{array}$

12) $\begin{array}{r} 3\frac{7}{9}x \\ -1\frac{2}{3}x \\ \hline +5\frac{4}{9}x \end{array}$
13) $\begin{array}{r} -5\frac{3}{5}y \\ -7\frac{4}{7}y \\ \hline +1\frac{34}{35}y \end{array}$
14) $\begin{array}{r} -\frac{3}{14}v \\ -\frac{2}{21}v \\ \hline -\frac{5}{42}v \end{array}$
15) $\begin{array}{r} 13\frac{7}{12}a \\ 11\frac{1}{2}a \\ \hline 2\frac{1}{12}a \end{array}$

16) $\begin{array}{r} 2\frac{3}{4}b \\ -7\frac{1}{3}b \\ \hline 10\frac{1}{12}b \end{array}$
17) $\begin{array}{r} -6\frac{4}{5}c \\ -2\frac{1}{2}c \\ \hline -4\frac{3}{10}c \end{array}$
18) $\begin{array}{r} -4\frac{3}{7}d \\ +3\frac{1}{4}d \\ \hline -7\frac{19}{28}d \end{array}$
19) $\begin{array}{r} 6a \\ -7b \\ \hline 6a+7b \end{array}$

20) $\begin{array}{r} 5c \\ 3a \\ \hline 5c-3a \end{array}$
21) $\begin{array}{r} -2a \\ -3b \\ \hline 3b-2a \end{array}$
22) $\begin{array}{r} -5x \\ -2y \\ \hline -5x-2y \end{array}$

23) $\begin{array}{l} 1\frac{1}{2}a+2\frac{1}{3}b-4c+2\frac{3}{4}d-7e-\frac{1}{6}f \\ \frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b-2\frac{1}{5}c+4\frac{1}{2}d-3g-\frac{1}{5}f+6h \\ \hline \frac{5}{6}a+2\frac{5}{6}b-1\frac{4}{5}c-1\frac{3}{4}d-7e+\frac{1}{30}f+3g-6h \end{array}$

24) $\begin{array}{l} 3\frac{1}{2}x-5y-4\frac{1}{3}v+2q+\frac{1}{2}p-r+\frac{2}{5}t \\ 1\frac{1}{3}x+3\frac{1}{2}y-5\frac{2}{3}v-2\frac{1}{4}q+\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}t+3n-4\frac{1}{3}m \\ \hline 2\frac{1}{6}x-8\frac{1}{2}y+1\frac{1}{3}v+4\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}p-r+\frac{9}{10}t-3n+4\frac{1}{3}m \end{array}$

25) $\begin{array}{l} 3\frac{2}{7}x-7\frac{1}{2}y-3v+6\frac{3}{4}z-3\frac{1}{3}n+3\frac{3}{11}m \\ 1\frac{1}{2}x-11\frac{1}{4}y-2\frac{1}{3}v-4\frac{1}{5}z+6\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}q \\ \hline 1\frac{11}{14}x+3\frac{3}{4}y-\frac{2}{3}v+10\frac{19}{20}z-3\frac{1}{3}n-3\frac{13}{33}m+\frac{1}{2}q \end{array}$

26) $\begin{array}{l} 17-4a+3b-8c+x \\ -4-a+7b-10c+d-2e \\ \hline 21-3a-4b+2c-d+2e+x \end{array}$

27) $\begin{array}{l} 3\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}y+6\frac{3}{5}z-7x \\ 8\frac{3}{4}-2\frac{1}{2}y+2\frac{2}{3}z+1\frac{3}{13}x \\ \hline -5\frac{1}{4}-2\frac{1}{6}y+3\frac{14}{15}z-8\frac{3}{13}x \end{array}$

28) $\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{4}c + \frac{4}{5}d - \frac{5}{6}e \\ \frac{6}{7} + \frac{7}{8}a + \frac{8}{9}b - \frac{9}{10}c - \frac{10}{11}d - \frac{11}{12}e \\ \hline \frac{1}{7} - 1\frac{3}{8}a - \frac{2}{9}b + \frac{3}{20}c + 1\frac{39}{55}d + \frac{1}{12}e \end{array}$

29) $\begin{array}{l} 1\frac{1}{3}a - 4\frac{1}{2}b + \frac{3}{5}c - \frac{1}{2}d \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + 1\frac{1}{2}c - \frac{3}{4}d - e \\ \hline 1\frac{5}{6}a - 4\frac{5}{6}b - \frac{9}{10}c + \frac{1}{4}d + e \end{array}$

30) $\begin{array}{l} 2\frac{1}{9} - 3\frac{1}{2}x + \frac{6}{7}y \\ \frac{1}{3} - 5\,x + 3\,z - \frac{1}{2}v \\ \hline 1\frac{7}{9} + 1\frac{1}{2}x + \frac{6}{7}y - 3\,z + \frac{1}{2}v \end{array}$

31) $\begin{array}{l} 3\frac{7}{12}x - 6\frac{3}{5}y - 7\frac{1}{4}z + 6\frac{3}{8}v - 3\frac{3}{7}w + \frac{3}{4}n \\ 1\frac{1}{8}x - 3\frac{1}{4}y + 3\frac{1}{2}z + 7\frac{3}{5}v - 7\frac{3}{11}w + \frac{1}{3}n \\ \hline 2\frac{11}{24}x - 3\frac{7}{20}y - 10\frac{3}{4}z - 1\frac{9}{40}v + 3\frac{65}{77}w + \frac{5}{12}n \end{array}$

III. Multiplication.

1) $7a \times 3ab = 21a^2b$ 2) $6c \times 3b = 18bc$

3) $4a^2b \times -5abc = -20a^3b^2c$

4) $-2a^2 \times 3ac = -6a^3c$ 5) $-2ab \times -3b = 6ab^2$

6) $-\frac{1}{2}a \times 4c = -2ac$ 7) $\frac{2a}{b} \times \frac{5a}{2} = \frac{5a^2}{b}$

8) $\frac{4a^2}{c} \times -\frac{3b}{a} = -\frac{12ab}{c}$ 9) $\frac{b^2c}{d^4} \times -\frac{cd}{ab} = -\frac{bc^2}{ad^3}$

10) $-\frac{4ax^2}{3by} \times -\frac{6bx}{a^2y} = \frac{8x^3}{ay^2}$

11) $\frac{6x^2y^3}{25z} \times -\frac{10z^2}{3x^2y} = -\frac{4y^2z}{5}$

12) $-\frac{3a}{2b} \times -\frac{5b^2}{6a^2} = \frac{5b}{4a}$ 13) $\frac{5n}{2} \times -\frac{6}{h} = -15$

14) $\frac{6p}{25q} \times \frac{10pq}{9} = \frac{4p^2}{15}$ 15) $\frac{m^3n^2}{r^4c^5} \times \frac{r^2c^4}{m^5n} = \frac{n}{r^2cm^2}$

16) $\frac{12}{a^2} \times -\frac{a}{3} = -\frac{4}{a}$ 17) $\frac{21x^2}{4y} \times \frac{12z}{5x} = \frac{63xz}{5y}$

18) $-\frac{2y^5}{5} \times -\frac{5y^2}{2} = y^7$

19) $5a^2 \times -3a^2 \times 4ab \times \frac{1}{2}b^2 = -30a^5b^3$

20) $-3ab \times -5bc \times -\frac{2a^2}{3b} = -10a^3bc$

21) $-\frac{5b}{3c} \times \frac{6a^2}{c} \times 6b \times \frac{1}{2c^2} = -\frac{30a^2b^2}{c^4}$

22) $-\frac{b^3c^4}{a} \times -\frac{c}{a^2b} \times -\frac{b^2}{c} \times -\frac{bc}{a} = \frac{b^5c^5}{a^4}$

23) $\frac{12g^2}{5c^3} \times -\frac{2ac^2}{3gh} \times -\frac{15ah}{4c^3} \times \frac{2c^2}{a^5} = \frac{12g}{c^2a^3}$

24) $-\frac{20y}{9z} \times -\frac{12yz}{35} \times \frac{42y}{z^2} \times -\frac{32z^2}{y^3} = -1024$

25) $\frac{ab}{3c} \times -\frac{4d}{5a} \times -\frac{6c}{b^3} \times \frac{10f}{3g} \times -\frac{7g}{3} = -\frac{112df}{9b}$

26) $-5a \times -6a \times 7a \times -\frac{1}{2}b \times \frac{3}{4}c \times -10c = 787\frac{1}{2}a^3bc^2$

27) $1\frac{3}{4}b \times -4\frac{1}{2}b \times 1\frac{1}{7}b \times -3l \times -5\frac{1}{3}h = -144b^3l^2h$

28) $(4a + 3b - 5c) \times 2d = 8ad + 6bd - 10cd$

29) $(5x - 2y - 3z + 7v) \times -3x = -15x^2 + 6xy + 9xz - 21xv$

30) $\left(\frac{a}{b} - \frac{2c}{3d} + \frac{5e}{f} + \frac{g}{2h}\right) \times \frac{6c}{5a} = \frac{6c}{5a} - \frac{4c^2}{5ad} + \frac{6ce}{af} + \frac{3cg}{5ah}$

31) $\left(-\frac{5y}{2x} - \frac{1}{2}z + \frac{3x}{y}\right) \times -\frac{2z}{3y} = \frac{5z}{3x} \times \frac{z^2}{3y} - \frac{2xz}{y^2}$

32) $(a - b + c) \times (d - e) = ad - bd + cd - ae + be - ce$

33) $\left(\frac{3x}{4y} - \frac{4y^2}{5x^2} + \frac{5x^3}{6y^3}\right) \times (xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y^3) = \frac{3x^2}{4} - \frac{4y^3}{5x} + \frac{5x^4}{6y^2} - \frac{3x^3y}{8} + \frac{2y^4}{5} - \frac{5x^5}{12y} + \frac{x^4y^3}{4} - \frac{4xy^5}{15} + \frac{5x^6}{18}$

34) $(3x^2 - 2ax - a^2) \times (5a^2x^3 - 2a^3x^2) = 15a^2x^5 - 16a^3x^4 - a^4x^3 + 2a^5x^2$

35) $[5a+\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}a^3+a^4]\times[\frac{1}{2}a^2-2a^3+\frac{1}{3}a^4]=\frac{5a^3}{2}$
$-\frac{77a^4}{8}-\frac{a^5}{12}+\frac{7a^6}{4}-\frac{13a^7}{6}+\frac{a^8}{3}$

36) $[4a^2-16ax+3x^2]\times[5a^3-2a^2x]=20a^5$
$-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3$

37) $[a^2+az+z^2]\times[a^2-az+z^2]=a^4+a^2z^2+z^4$

38) $[a^6-3a^4b^2+5a^2b^4]\times[7a^4-4a^2b^2+b^4]=$
$7a^{10}-25a^8b^2+48a^6b^4-23a^4b^6+5a^2b^8$

39) $[7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3]\times[3a^4-4a^3b$
$+16a^2b^2]=21a^7-43a^6b+130a^5b^2-110a^4b^3$
$+104a^3b^4-32a^2b^5$

40) $[a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5]\times$
$[a^3-3a^2b+3ab^2-b^3]=a^8-8a^7b+28a^6b^2$
$-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$

41) $\left[\frac{2a^3y^2}{3x}+\frac{5a^2y^3}{2}+ay^4x\right]\times\left[\frac{3yx^2}{2}-\frac{4y^2x^3}{5a}\right]=$
$a^3y^3x+\frac{193a^2y^4x^2}{360}-\frac{ay^5x^3}{2}-\frac{4y^6x^4}{5}$

42) $\left[5x^2+\frac{3x^3}{2y}-\frac{x^4}{3y^2}+\frac{4x^5}{5y3}\right]\times\left[\frac{2y^2}{5x}-\frac{4y}{3}+\frac{3x}{2}\right]$
$=2xy^2-\frac{91x^2y}{15}+\frac{161x^3}{30}+\frac{2713x^4}{900y}-\frac{47x^5}{30y^2}+\frac{6x^6}{5y^3}$

43) $\left[\frac{2a^2b}{c^2}-\frac{3a}{2c}-\frac{4}{3b}+\frac{c}{2ab^2}\right]\times\left[\frac{3a^2}{2bc}-\frac{a}{3b^2}+\frac{4c}{b^3}\right]$
$=\frac{3a^4}{c^3}-\frac{35a^3}{12bc^2}+\frac{13a^2}{2b^2c}-\frac{173a}{36b^3}-\frac{11c}{2b^4}+\frac{2c^2}{ab^5}$

44) $\left[\frac{4a^2}{b^3}-\frac{3a^3}{2b^2}+\frac{a^4}{3b}+\frac{2a^5}{3}\right]\times\left[\frac{4}{a^2b}-\frac{3}{2a}-\frac{b}{3}\right]=$
$\frac{16}{b^4}-\frac{12a}{b^3}+\frac{9a^2}{4b^2}+\frac{8a^3}{3b}-\frac{10a^4}{9}+\frac{2a^5b}{9}$

/2

45) $\left[\frac{4a}{3}-\frac{2a^2b}{5}+\frac{a^3b^2}{2}+\frac{3a^4b^3}{4}\right]\times\left[\frac{6b}{a}-\frac{4b^2}{3}-\frac{ab^3}{4}\right]$
$=8b-\frac{188}{45}ab^2+\frac{16}{5}a^2b^3+\frac{59a^3b^4}{15}-\frac{9}{8}a^4b^5-\frac{3a^5b^6}{16}$

46) $\left[\frac{4x}{3y^2}+\frac{2x^2}{5y}-\frac{3x^3}{2}+\frac{x^4y}{6}\right]\times\left[\frac{3x^2y}{4}-\frac{5x^3y^2}{3}\right]=$
$\frac{x^3}{y}-\frac{173x^4}{90}-\frac{43x^5y}{24}+\frac{21x^6y^2}{8}-\frac{5x^7y^3}{18}$

47) $\left[\frac{4xy}{3}-\frac{2x^3}{y}-\frac{5x^5}{2y^3}\right]\times\left[\frac{2xy}{5}-\frac{x^3}{2y}\right]=\frac{8x^2y^2}{15}$
$-\frac{22x^4}{15}+\frac{5x^8}{4y^4}$

48) $\left[\frac{a^2x}{y}-\frac{2a^3}{3}-\frac{a^4y}{4x}+\frac{3a^5y^2}{x^2}\right]\times\left[\frac{ax^2}{2y}-\frac{2a^2x}{3}-6a^3y\right]$
$=\frac{a^3x^3}{2y^2}-\frac{a^4x^2}{y}-\frac{409a^5x}{72}+\frac{17a^6y}{3}-\frac{a^7y^2}{2x}-\frac{18a^8y^4}{x^2}$

49) $\left[\frac{5x^3}{2y}-\frac{7y}{3}-\frac{y^3}{x^3}+\frac{4y^5}{5x^6}\right]\times\left[\frac{10x^4}{9y^2}+\frac{5x}{2}-\frac{y^2}{6x^2}\right]=$
$\frac{25x^7}{9y^3}+\frac{395x^4}{108y}-\frac{265xy}{36}-\frac{11y^3}{9x^2}+\frac{13y^5}{6x^5}-\frac{2y^7}{15x^8}$

50) $\left[\frac{5x^2}{2y}-\frac{3yx}{4}-\frac{y^3}{3}+\frac{12y^5}{x}\right]\times\left[\frac{6x}{y^3}-\frac{4}{3y}-\frac{y}{2x}\right]=$
$\frac{15x^3}{y^4}-\frac{47x^2}{6y^3}+\frac{7x}{4}+\frac{5179y^2}{72}-\frac{97y^4}{6x}-\frac{6y^6}{x^2}$

51) $\left[\frac{3x^2}{2y}-\frac{4xy}{3}+\frac{y^3}{4}+\frac{2y^5}{x}\right]\times\left[\frac{4x^3}{y}-\frac{3x^2y}{2}\right]=\frac{6x^5}{y^2}$
$-\frac{91x^4}{12}+3x^3y^2+\frac{61}{8}x^2y^4-3xy^6$

52) $\left[5a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{4}{3}a + 6\right] \times \left[3a - \frac{3}{4} + \frac{12}{a}\right] =$
$15a^4 - \frac{33}{4}a^3 + \frac{521}{8}a^2 - a + \frac{23}{2} + \frac{72}{a}$

53) $\left[\frac{3x^2}{2y} - \frac{x}{3} + \frac{5y}{4} + \frac{3y^2}{x}\right] \times \left[\frac{6x}{y^2} - \frac{1}{3y} - \frac{4}{x}\right] = \frac{9x^3}{y^3}$
$- \frac{5x^2}{2y^2} + \frac{29x}{18y} + \frac{227}{12} - \frac{6y}{x} - \frac{12y^2}{x^2}$

54) $\left[\frac{3x^2}{4y^3} - \frac{5x}{6y} - \frac{12y}{5} - \frac{10y^3}{3x}\right] \times \left[\frac{5x}{2y} - \frac{4y}{3} - \frac{6y^3}{5x}\right] =$
$\frac{15x^3}{8y^4} - \frac{37x^2}{12y^2} - \frac{521x}{90} + \frac{188y^2}{15} - \frac{352y^4}{225x} - \frac{4y^6}{x^2}$

55) $\left[\frac{4a^4b}{3c} - \frac{10ac}{b^3} - \frac{3c^3}{4a^2b^7} + \frac{c^5}{6a^5b^{11}}\right] \times \left[\frac{6a^6b^5}{5c^2} - \frac{3a^3b}{2}\right.$
$\left. + \frac{4c^2}{3b^3}\right] = \frac{8a^{10}b^6}{5c^3} - \frac{14a^7b^2}{c} + \frac{1429a^4c}{90b^3} - \frac{1441ac^3}{120b^6}$
$- \frac{5c^5}{4a^2b^{10}} + \frac{2c^7}{9a^5b^{14}}$

56) $\left[\frac{9x^2}{4y} - \frac{5xy}{6} - \frac{15y^3}{2} + \frac{4y^5}{3x}\right] \times \left[\frac{8}{3y^2} - \frac{6}{5x} + \frac{3y^2}{10x^2}\right]$
$= \frac{6x^2}{y^3} - \frac{443x}{90y} - \frac{733y}{40} + \frac{443y^3}{36x} - \frac{77y^5}{20x^2} + \frac{2y^7}{5x^3}$

57) $\left(\frac{ax}{b} + \frac{cy}{d}\right) \times \left(\frac{ax}{b} - \frac{cy}{d}\right) = \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{c^2y^2}{d^2}$

58) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4) \times (x - \frac{1}{6}x^2) = \frac{1}{2}x^2 +$
$\frac{1}{4}x^3 - \frac{11}{36}x^4 - \frac{19}{120}x^5 + \frac{1}{30}x^6$

59) $\left[\frac{ab}{c} + \frac{3b}{d} - \frac{3c^2}{e}\right] \times \left[\frac{ad}{c} - 4\right] = \frac{a^2bd}{c^2} - \frac{ab}{c}$
$\frac{3acd}{e} - \frac{12b}{d} + \frac{12c^2}{e}$

60) $\left[\frac{a^4}{3b}-\frac{3a^3}{5b^2}+\frac{5a^2}{b^3}-\frac{4a}{b^4}\right]\times\left[\frac{2a^3}{3}+\frac{3a^2}{2b}-\frac{5a}{3b^2}-\frac{6}{5b^3}\right]=\frac{2a^7}{9b}+\frac{a^6}{10b^2}+\frac{169a^5}{90b^3}+\frac{163a^4}{30b^4}-\frac{1021a^3}{75b^5}+\frac{2a^2}{3b^6}+\frac{24a}{5b^7}$

61) $[\frac{1}{2}x^3y^7 - \frac{1}{3}x^5y^6 - \frac{2}{5}x^4y^5 + \frac{5}{6}x^5y^4]\times\left[\frac{6x}{5y}-\frac{3x^2}{4y^2}+\frac{4x^3}{3y^3}\right]=\frac{3x^3y^6}{5} - \frac{31}{40}x^4y_5 + \frac{131}{300}x^5y^4 + \frac{77}{90}x^6y^3 - \frac{139}{120}x^7y^2 + \frac{10}{9}x^8y$

62) $\left[\frac{b^3}{2a}-\frac{3b^2}{4a^2}+\frac{5b}{6a^3}-\frac{15}{8a^4}+\frac{6}{a^5b}-\frac{1}{10a^6b^2}\right]\times\left[\frac{a^6}{b}+\frac{2a^5}{b^2}-\frac{4a^4}{5b^3}\right]=\frac{a^5b^2}{2}+\frac{a^4b}{4}-\frac{16a^3}{15}+\frac{47a^2}{120b}+\frac{19a}{12b^2}+\frac{67}{5b^3}-\frac{5}{ab^4}+\frac{2}{25a^2b^5}$

63) $[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4] \times [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4] = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{36}x^6 + \frac{1}{16}x^8$

64) $\left[\frac{ay}{bx^2}-\frac{2a^2}{3x}+\frac{3a^3b}{y}-\frac{a^4b^2x}{4y^2}+\frac{a^5b^3x^2}{y^3}\right]\times\left[\frac{xy}{ab}-\frac{3x^2}{2}+\frac{2x^3ab}{y}\right]=\frac{y^2}{b^2x}-\frac{13ay}{6b}+6a^2x-\frac{73a^3bx^2}{12y}+\frac{59a^4b^2x^3}{8y^2}-\frac{2a^5b^3x^4}{y^3}+\frac{2a^6b^4x^5}{y^4}$

65) $\left[\frac{4x^2}{3y}-\frac{5x}{4}+2y+\frac{3y^2}{4x}\right]\times\left[\frac{2x^3}{y^2}+\frac{3x^2}{2y}-\frac{x}{3}\right]=\frac{8x^5}{3y^3}-\frac{x^4}{2y^2}+\frac{121x^3}{72y}+\frac{59x^2}{12}+\frac{11xy}{24}-\frac{y^2}{4}$

66) $\left[\frac{3x^2}{4y^3}-\frac{2x}{y^2}-\frac{3}{5y}+\frac{6}{x}-\frac{y}{2x^2}\right]\times\left[\frac{5x^2}{2y}-\frac{20x}{3}+\frac{y}{6}\right]=\frac{15x^4}{8y^4}-\frac{10x^3}{y^3}+\frac{287x^2}{24y^2}+\frac{56x}{3y}-\frac{827}{20}+\frac{13y}{3x}-\frac{y^2}{12x^2}$

67) $\left[\frac{5a^2}{3b}-\frac{4a}{5}+3b+\frac{b^2}{2a}\right]\times\left[6ab^2-\frac{5b^3}{2}-\frac{4b^4}{3a}\right]=10a^3b-\frac{269a^2b^2}{30}+\frac{160ab^3}{9}-\frac{103b^4}{30}-\frac{21b^5}{4a}-\frac{2b^6}{3a^2}$

68) $\left[\frac{5x}{3y^2}-\frac{2x^2}{y}-\frac{x^3}{4}+yx^4\right]\times\left[\frac{6y}{x^2}-\frac{3y^2}{2x}-\frac{y^3}{3}\right]=\frac{10}{xy}-\frac{29}{2}+\frac{17xy}{18}+\frac{169x^2y^2}{24}-\frac{17x^3y^3}{12}+\frac{x^4y^4}{3}$

69) $\left[\frac{3x^5y^2}{5}-\frac{7x^2y^3}{4}-\frac{16y^4}{9x}+\frac{y^5}{2x^4}-\frac{12y^6}{x^7}\right]\times\left[\frac{10x^4}{9y^3}+\frac{24x}{y}-\frac{90}{x^2}\right]=\frac{2x^9}{3}+\frac{1121x^6y}{90}-\frac{7936x^3y^2}{81}+\frac{2077y^3}{18}+\frac{476y^4}{3x^3}-\frac{333y^5}{x^6}-\frac{1080y^6}{x^9}$

70) $\left[\frac{4x^3}{3y}-\frac{6x}{5}-\frac{7y}{2x}+\frac{12y^2}{x^3}-\frac{y^3}{4x^5}\right]\times\left[\frac{10x^4}{3y^2}-\frac{6x^2}{y}-\frac{9}{2}+\frac{y}{4x^2}\right]=\frac{40x^7}{9y^3}-\frac{12x^5}{y^2}-\frac{157x^3}{15y}+\frac{1001x}{15}-\frac{3443y}{60x}-\frac{427y^2}{8x^3}+\frac{33y^3}{8x^5}-\frac{y^4}{16x^7}$

IV. Division.

1) $6a^5 : 3a = 2a^4$ 2) $4ab^2 : bc = \frac{4ab}{c}$

3) $-5c^2 : 3c = -\frac{5}{3}c$ 4) $50x^2y : 35y^2 = \frac{10x^2}{7y}$

5) $9a^2b : -6ac = -\frac{3ab}{2c}$ 6) $-8h : -2h^2 = \frac{4}{h}$

7) $-12ab^2 : -\frac{1}{4}a^2b = \frac{48b}{a}$ 8) $-\frac{1}{2}c : \frac{1}{3}c = -\frac{3}{2}$

9) $\frac{4a^2}{3b^2} : \frac{2a^3}{9b} = \frac{6}{ab}$ 10) $-\frac{2x}{y^2} : \frac{3}{y} = -\frac{2x}{3y}$

11) $\frac{5x^3y^2}{2z^3} : -\frac{3xz}{4y^4} = -\frac{10x^2y^6}{3z^4}$

12) $-\frac{45abc}{16de} : -\frac{3ac}{8d} = \frac{15b}{2e}$ 13) $-\frac{1}{5x} : -\frac{1}{5x^2} = x$

14) $\frac{4z}{3yx} : \frac{xvz}{2y} = \frac{8}{3x^2v}$ 15) $\frac{4x^2y}{3a} : -\frac{2a^2x}{5} = -\frac{10xy}{3a^3}$

16) $\frac{18y^4z^3}{5x^2} : \frac{6xy}{z} = \frac{3y^3z^4}{5x^3}$

17) $-\frac{3a^2x^7}{16y^5} : \frac{9a^3yx^9}{4} = -\frac{1}{12ay^6x^2}$

18) $-\frac{5m^5n^4}{r^2} : -\frac{2m^2n^9}{3r} = \frac{15m^3}{2rn^5}$

19) $\frac{15a^4b^3}{7c^2d} : \frac{10a^2b^4c}{21d^3} = \frac{9a^2d^2}{2bc^3}$

20) $7\frac{1}{2}a^2 : 3\frac{1}{2}ab = \frac{15a}{7b}$ 21) $-4b : -3\frac{1}{3}bc = \frac{6}{5c}$

22) $-9\frac{3}{4}x : 4\frac{1}{3}x = -2\frac{1}{4}$ 23) $3\frac{1}{5}yz : -3\frac{1}{3}yv = -\frac{24z}{25v}$

24) $\frac{5x^2y^3}{2} : -\frac{1}{2x} = -5x^3y^3$

25) $\frac{20a^5b^7c^2}{21d^4e^5f^7} : -\frac{15a^3d^3f^9}{14b^2c^3e} = \frac{8a^2b^9c^5}{9d^7e^4f^{16}}$

26) $\frac{5a^7x^3y^6}{3b^8c^3} : -\frac{10a^4b^3c}{x^2y^3z} = -\frac{a^3x^5y^9z}{6b^5c^4}$

27) $\left[\frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right] \times \frac{ab}{c} = \frac{b^2}{c}$

28) $[16a^5 - 3a^2b + 8ab^5] : 4a^2 = 4a^3 - \frac{3}{4}b + \frac{2b^5}{a}$

29) $\left[\frac{2x^2}{3y} - \frac{5x}{2} - \frac{3y}{2x}\right] : 3x = \frac{2x}{9y} - \frac{5}{6} - \frac{y}{2x^2}$

30) $\left[\frac{a^4}{2b} - \frac{3a}{4} - \frac{a^2}{3b} + \frac{5ab}{2}\right] : -\frac{2a}{3b} = -\frac{3a^3}{4}$
$+ \frac{9b}{8} + \frac{a}{2} - \frac{15b^2}{4}$

31) $\left[\frac{3x^4y^3}{2} + \frac{5x^3y^4}{a^3} - \frac{6x^3a^2}{y}\right] : \frac{3x^2a^4}{y^2} = \frac{x^2y^5}{2a^6}$
$+ \frac{5xy^6}{3a^6} - \frac{2xy}{a^3}$

32) $[a^3 + a^2b - ab^2 - b^3] : [a - b] = a^2 + 2ab + b^2$

33) $[a^8 - 16x^8] : [a^2 - 2x^2] = a^6 + 2a^4x^2$
$+ 4a^2x^4 + 8x^6$

34) $[4c^4 - 9b^2c^2 + 6b^3c - b^4] : [2c^2 - 3bc + b^2]$
$= 2c^2 + 3bc - b^2$

35) $[6a^4b^3 - 2a^5b^4 - 43a^6b^5 + 35a^7b^6] : [3ab$
$- 7a^2b^4] = 2a^3 + 4a^4b - 5a^5b^2$

36) $\left[10a^2 + \frac{37ab}{3} - 23ac - \frac{7b^2}{3} - \frac{55bc}{2} + 6c^2\right] : \left[5a + 7b - \frac{3c}{2}\right] = 2a - \frac{b}{3} - 4c$

37) $\left[\frac{5a^4x^3}{3y^5} - \frac{35a^5x^2}{18y^4} - \frac{44a^6x}{15y^3} + \frac{19a^7}{6y^2} - \frac{3a^8}{20yx}\right] : \left[\frac{2ax^2}{3y^3} - \frac{3a^2x}{5y^2}\right] = \frac{5a^3x}{2y^2} - \frac{2a^4}{3y} - \frac{5a^5}{x} + \frac{a^6y}{4x^2}$

38) $\left[14a^6x^3 + \frac{5a^5x^4}{2} - 22a^4x^5 + 25a^3x^6 - 24a^2x^7\right] : [7a^2x - 4ax^2 + 6x^3] = 2a^4x^2 + \frac{3a^3x^3}{2} - 4a^2x^4$

39) $\left[\frac{28x^5}{3y^3} - \frac{12x^3}{y^2} + \frac{92x}{3y} + \frac{19}{2x} - \frac{5y}{x^3}\right] : \left[\frac{4x^3}{3y^2} - \frac{2x}{y} + \frac{5}{x}\right] = \frac{7x^2}{y} + \frac{3}{2} - \frac{y}{x^2}$

40) $[5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5] : [5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2] = a^3 - 4a^2b + 2b^3$

41) $\left[8a^3b^4 + 2a^4b^5 - 17a^5b^6 + \frac{5a^6b^7}{2}\right] : [4ab^3 - 5a^2b^4] = 2a^2b + 3a^3b^2 - \frac{a^4b^3}{2}$

42) $\left[\frac{8x^5}{15y^3} + \frac{4x^3}{5y^2} - \frac{83x}{8y} - \frac{41}{60x} + \frac{241y}{8x^3} - \frac{y^2}{x^5}\right] : \left[\frac{2x^2}{5y^2} + \frac{3}{4y} - \frac{6}{x^2}\right] = \frac{4x^3}{3y} - \frac{x}{2} - \frac{5y}{x} + \frac{y^3}{6x^3}$

43) $(18x^3 - 31x^4 - 41x^5 + 57x^6 - 21x^7 - 15x^8 + 31x^9 - 12x^{10}) : (9x^2 - 2x^3 - x^4 + 4x^5 - 3x^6) = 2x - 3x^2 - 5x^3 + 4x^4$

44) $\left(\frac{8x^5}{y^3} - \frac{35x^4}{9y^2} - \frac{25x^3}{6y} + \frac{x^2}{2}\right) : \left(\frac{6x^3}{y^2} - \frac{2x^2}{3y}\right) = \frac{4x^2}{3y} - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}$

45) $\left(\frac{4x^3}{5y^3} + \frac{13x^2}{90y} - \frac{11xy}{10} + \frac{139y^3}{24} + \frac{43y^5}{12x} + \frac{5y^7}{2x^2}\right) : \left(\frac{6x}{5y^2} + \frac{2}{3} - \frac{y^2}{2x}\right) = \frac{2x^2}{3y} - \frac{xy}{4} - \frac{y^3}{2} + \frac{5y^5}{x}$

46) $[15y^4 + 16y^5 - 38y^6 - 17y^7 + 37y^8 - 5y^9 - 13y^{10} + 2y^{11}] : [5y - 3y^2 - y^3 + 2y^4] = 3y^3 + 5y^4 - 4y^5 - 6y^6 + y^7$

47) $\left(\frac{4a^5}{5b^5} + \frac{5a^3}{18b^2} - \frac{47ab}{10} + \frac{1979b^4}{144a} + \frac{647b^7}{24a^3} - \frac{35b^{10}}{2a^5}\right) : \left(\frac{6a^3}{5b^4} + \frac{80a}{3b} - \frac{7b^2}{4a}\right) = \frac{2a^2}{3b} - \frac{5b^2}{4} - \frac{b^5}{6a} + \frac{10b^8}{a^4}$

48) $\left(24x^5y + 6x^4y^2 - 7x^3y^3 - 5x^2y^4 + \frac{3xy^5}{2}\right) : \left(6x^3y - \frac{3x^2y^2}{2}\right) = 4x^2 + 2xy - \frac{2y^2}{3} - \frac{y^3}{x}$

49) $\left(6a^3 - \frac{29a^2x^2}{4} - 14ax^4 + \frac{431x^6}{6} + \frac{11x^8}{a} - \frac{12x^{10}}{a^2}\right) : \left(\frac{12a}{x} + \frac{3x}{2} - \frac{2x^3}{a}\right) = \frac{a^2x}{2} - \frac{2ax^3}{3} - x^5 + \frac{6x^7}{a}$

50) $\left(12n^5 - \frac{68n^4}{5} + \frac{5n^3}{3} + \frac{2n^2}{5}\right) : \left(4n^2 - \frac{6n}{5}\right)$
$= 3n^3 - \frac{5n^2}{3} - \frac{n}{3}$

51) $\left(\frac{8x^5}{3y^3} - \frac{16x^3}{9y} - \frac{73xy}{3} - \frac{15y^3}{8x} + \frac{3y^5}{2x^3}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y}\right.$
$\left. - \frac{y}{2} - \frac{6y^3}{x^2}\right) = \frac{4x^3}{y^2} + \frac{x}{3} - \frac{y^2}{4x}$

52) $(20a^5 - 88a^4x + 47a^3x^2 - 6a^2x^3) : (5a^3$
$-2a^2x) = 4x^2 - 16ax + 3x^2$

53) $\frac{a^7}{2y} - \frac{17a^6}{12y^2} - \frac{1381a^5}{144y^3} + \frac{7a^4}{6y^4} - \frac{15a^3}{4y^5}\Big) : \Big(\frac{2a^5}{y^2}$
$- \frac{a^4}{3y^3} + \frac{3a^3}{4y^4}\Big) = \frac{a^2y}{4} - \frac{2a}{3} - \frac{5}{y}$

54) $\left(2a^5 + \frac{43a^3b}{60} - \frac{17ab^2}{2} + \frac{19b^3}{12a} + \frac{5b^4}{2a^3}\right) : \left(\frac{5a^3b}{2}\right.$
$\left. - \frac{2ab^2}{3} - \frac{5b^3}{6a}\right) = \frac{4a^2}{5b} + \frac{1}{2} - \frac{3b}{a^2}$

55) $\left(12a^3b - 29a^2b^3 - 13ab^5 + 25b^7 - \frac{3b^9}{a}\right) :$
$(4ab - 3b^3) = 3a^2 - 5ab^2 - 7b^4 + \frac{b^6}{a}$

56) $(a^2b + acd + ab^2 + bcd) : (a+b) = ab + cd$

57) $(a^2x^2 - b^2x^4 + 2bcx^5 - c^2x^6) : (ax + bx^2$
$- cx^3) = ax - bx^2 + cx^3$

58) $\left(\frac{28x^8}{15a^2} - \frac{39x^7}{25a^3} + \frac{1049x^6}{540a^4} - \frac{2933x^5}{720a^5} + \frac{20x^4}{9a^6} - \frac{257x^3}{120a^7} + \frac{x^2}{2a^8}\right) : \left(\frac{4x^3}{3a} - \frac{2x^3}{5a^2} + \frac{3x}{4a^3}\right) = \frac{7x^5}{5a} - \frac{3x^4}{4a^2} + \frac{4x^3}{9a^3} - \frac{5x^2}{2a^4} + \frac{2x}{3a^5}$

59) $(a^8 - b^8) : (a + b) = a^7 - ba^6 + b^2a^5 - b^3a^4 + b^4a^3 - b^5a^2 + b^6a - b^7$

60) $\left(\frac{49a^3}{3b} - \frac{343a^4}{45} + \frac{259a^6b^2}{175} - \frac{117a^7b^3}{245}\right) : \left(\frac{7a^4}{3b} - \frac{6a^5}{5} + \frac{3a^6b}{7}\right) = \frac{7}{a} + \frac{b}{3} - \frac{39ab^2}{35}$

61) $\left(\frac{x^5y^3}{2} - \frac{122x^3y}{15} + \frac{92x^2}{15} - \frac{32}{75y^2}\right) : \left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{8y^2}{3x} - \frac{16y}{15x^2}\right) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{3x^4}{y} + \frac{x^3}{y^2} + \frac{2x^2}{5y^3}$

62) $(\frac{1}{9} - 6x^2 + 27x^4) : (\frac{1}{3} + 2x + 3x^2) = \frac{1}{3} - 6x + 9x^2$

63) $\left[\frac{3a^4}{x^4} - \frac{19a^3b}{10x^3y} + \frac{21a^2b^2}{5x^2y^2} - \frac{9ab^3}{10xy^3} + \frac{b^4}{y^4}\right] : \left[\frac{3a^2}{x^2} - \frac{2ab}{5xy} + \frac{b^2}{y^2}\right] = \frac{a^2}{x^2} - \frac{ab}{2xy} + \frac{b^2}{y^2}$

64) $\left[\frac{10x^3}{3a^2} + \frac{2x^2}{15a} - \frac{133x}{50} - \frac{97a^2}{20x} - \frac{3a^3}{2x^2}\right] : \left[\frac{2x}{a} - \frac{2}{5} + \frac{3a}{2x}\right] = \frac{5x^2}{3a} + \frac{2x}{5} - \frac{7a}{2} - \frac{a^2}{x}$

65) $\left[\frac{3a^3b^3}{2} - \frac{97ab^2}{20} + 8b - \frac{97}{6a} + \frac{10}{a^2b}\right] : \left[\frac{5b^2}{2a} - \frac{6b}{a^2}\right] = \frac{3a^3b}{5} - \frac{a^2}{2} + \frac{2a}{b} - \frac{5}{3b^2}$

66) $\left[\frac{2x^3}{3y^3} - \frac{51x^2}{15y^2} + \frac{199}{40} - \frac{453y}{32x} - \frac{27y^2}{8x^2}\right] : \left[\frac{x}{6y^2} - \frac{5}{2y} - \frac{9}{16x}\right] = \frac{4x^2}{3y} - \frac{2x}{5} - \frac{3y}{2} + \frac{6y^2}{x}$

67) $\left[\frac{15x^3}{8y^4} + \frac{19x}{4y^2} + \frac{41}{18y} - \frac{32y}{5x^2}\right] : \left[\frac{3x^3}{4y} + \frac{x}{2} - \frac{y}{6} - \frac{4y^2}{5x}\right] = \frac{5x}{2y^3} - \frac{5}{3y^2} + \frac{8}{xy}$

68) $\left[\frac{8x}{15y^2} - \frac{104}{25y} - \frac{31}{15x} + \frac{57y}{10x^2} - \frac{2y^3}{x^4}\right] : \left[\frac{4x^2}{3y} - \frac{2x}{5} - \frac{3y}{2} + \frac{y^2}{x}\right] = \frac{2}{5xy} - \frac{3}{x^2} - \frac{2y}{x^3}$

69) $\left[\frac{2x^5}{5y^2} - \frac{181x^3}{140y} - \frac{617x}{210} + \frac{1051y}{48x} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{224y^3}{3x^5}\right] : \left[\frac{2x^3}{3y} - \frac{x}{4} - \frac{28y}{9x}\right] = \frac{3x^2}{5y} - \frac{12}{7} - \frac{9y}{4x^2} + \frac{24y^2}{x^4}$

70) $\left[\frac{8y^9}{5x^3} + \frac{2y^6}{5x^2} - \frac{457y^3}{24x} + \frac{219x}{8y^3} + \frac{545x^2}{4y^6} - \frac{195x^3}{y^9}\right] : \left[\frac{2y^4}{3x^2} - \frac{y}{4x} - \frac{15}{2y^2} + \frac{10x}{y^5}\right] = \frac{12y^5}{5x} + \frac{3y^2}{2} - \frac{x}{y} - \frac{39x^2}{2y^4}$

V. Division, wo der Divisor in dem Dividendus nicht aufgeht, oder Entwickelung der Brüche in unendlichen Reihen, zur Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten.

1) $\frac{2+x}{1-2x^2} = 2+x+4x^2+2x^3+\ldots\ldots C=2A$ *)

3) $\frac{1-3x+x^3}{1-x+2x^2} = 1-2x-3x^2+x^3+7x^4+5x^5$ $-\ldots \quad D = C - 2B$

2) $\frac{1-2x^2+x^3}{1-x^2+2x^3} = 1 - x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6$ $3x^7\ldots.E=C-2B$

4) $\frac{x}{a\pm x} = \frac{x}{a} \mp \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} \mp \frac{x^4}{a^4}\ldots.C = \mp\frac{B}{a}$

5) $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+\ldots$ $C = A+B$

6) $\frac{a-bx}{1+x} = a-(a+b)x + (a+b)x^2 - (a+b)x^2$ $+\ldots.C = -B$

---

*) Die Buchstaben A, B, C, D u. s. w. bedeuten nach der Reihe die Coefficienten von $x^0 = 1$, x, x^2, x^3 u. s. w. Die angefügten Ausdrücke $C = 2A$, $D = C - 2B$ u. s. w. drücken das Gesetz aus, nach welchem die einzelnen Coefficienten aus den vorhergehenden entstehen, und zwar ist das Gesetz allemal für den Buchstaben angegeben, bei welchem die gesetzmäßige Bildung beginnt, so daß also im ersten Beispiele das Gesetz bei C d. h. beim Coefficienten von x^2, im zweiten bei D d. h. beim Coefficienten von x^3 seinen Anfang nimmt.

7) $\dfrac{2+x-2x^2}{1-x^2}=2+x+x^3+x^5+x^7\ldots \quad D=B$

8) $\dfrac{1-\frac{2}{3}x}{1+\frac{1}{2}x}=1-\frac{7}{6}x+\frac{7}{12}x^2-\frac{7}{24}x^3+\ldots \quad C=-\frac{1}{2}B$

9) $\dfrac{1-x^2+x^3}{1+x^2-x^3}=1-2x^2+2x^3+2x^4-4x^5$
$+6x^7-\ldots \quad E=B-C$

10) $\dfrac{2+x-2x^2}{1-3x}=2+7x+19x^2+57x^3+171x^4+\ldots$
$D=3C$

11) $\dfrac{1-2x^2+x^3}{2-x^2+2x^3}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{3}{4}x^5-\ldots.$
$E=\dfrac{C-2B}{2}$

12) $\dfrac{3x-x^3}{1+x^2-2x^3}=3x-4x^3+6x^4+4x^5-\ldots.$
$E=2B-C$

13) $\dfrac{2-x^2+x^4}{3-x^2}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{8x^4}{27}+\dfrac{8x^6}{81}+\ldots \quad F=\dfrac{D}{3}$

14) $\dfrac{1-3x^2+4x^3}{1-3x+2x^3}=1+3x+6x^3+20x^3+54x^4$
$+\ldots. \quad E=3D-2B$

15) $\dfrac{2-3x+x^2}{1-x+2x^3}=2-x-4x^3-2x^4-\ldots \; D=C-2A$

16) $\dfrac{1-5x^2+x^4}{1-3x-2x^3}=1+3x+4x^2+14x^3+49x^4+$
$155x^5\ldots \quad F=3E+2C$

17) $\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2}{2+\frac{1}{3}x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{18}x^4 - \frac{1}{108}x^6 \quad D = -\dfrac{B}{6}$

18) $\dfrac{5-2x+x^2}{3-x} = \frac{5}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{8}{27}x^2 + \frac{8}{81}x^4 + \ldots \; D = \frac{1}{3}C$

19) $\dfrac{1+x-x^2-x^3}{1-2x^2} = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5$
$+ \ldots \quad E = 2C$

20) $\dfrac{1+2x^2}{1-2x} = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 24x^4 + \ldots.$
$D = 2C$

21) $\dfrac{a+bx-cx^2}{d+x} = \dfrac{a}{d} + \left(\dfrac{bd-a}{d^2}\right)x - \left[\dfrac{(b+cd)\,d-a}{d^3}\right]x^2$
$+ \left(\dfrac{(cd+b)\,d-a}{d^4}\right)x^3 - \ldots \quad D = -\dfrac{C}{d}$

22) $\dfrac{2-x+5x^2}{1-2x^2} = 2 - x + 9x^2 - 2x^3 + 18x^4 - \ldots$
$D = 2B$

23) $\dfrac{a-x+x^2}{a-x^2} = 1 - \dfrac{x}{a} + \dfrac{2x^2}{a} - \dfrac{x^3}{a^2} + \dfrac{2x^4}{a^3} - \ldots \quad D = \dfrac{B}{a}$

24) $\dfrac{2+x}{2-x+x^2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \ldots$
$C = \dfrac{B-A}{2}$

25) $\dfrac{5+3x}{1-2x^2} = 5 + 3x + 10x^2 + 6x^3 + 20x^4 + \ldots$
$C = 2A$

VI. Potenzen von Potenzen.

1) $(a^8 \,.\, b^3)^2 = a^{16}b^6$ 2) $(a^5)^3 = a^{15}$

3) $(a^2b^7c^5)^3 = a^6b^{21}c^{15}$ 4) $(ab^2c^3)^2 = a^2b^4c^6$

5) $(a^2b^7c^5)^3 : (ab^2c^3)^2 = a^4b^{17}c^9$

6) $\left[(a^5b^2)^7 : (a^9b)^2\right]^3 = a^{51}b^{36}$

7) $(a^8 b^3)^5 \,.\, (a^2 b)^3 = a^{46} b^{18}$

8) $(a^6 bc^2)^4 : (abc^3)^2 = a^{22}b^2c^2$

9) $(a^{11} b^7 : a^2b^5)^3 = a^{27} b^6$

10) $\left(\frac{a^{11}}{b^5}\right)^2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^{23}}{b^{11}}$

11) $(a^2b^3c^5 : abc^3)^5 = a^5b^{10}c^{10}$

12) $\left[(a^2b)^2 \,.\, (ab^2)^3\right]^4 = a^{28} b^{32}$

13) $\left(\frac{a^2b}{c}\right)^3 \cdot \left(\frac{ac}{b^2}\right)^2 = \frac{a^8}{bc}$

14) $(a^3 \,.\, a^2)^5 : (a^2)^4 = a^{17}$

15) $\left(\frac{a^4b^2}{c^3}\right)^5 \times \frac{(ab)^2}{c^4} \times \left(\frac{c^3}{a}\right)^2 = \frac{a^{20}b^{12}}{c^{13}}$

16) $(a^9b^2)^4 : (a^6b)^3 = a^{18}b^5$

17) $(a^5 \,.\, a^3 \,.\, a^7)^2 : (a^2 \,.\, a^4)^3 = a^{12}$

18) $(a^2bc^4d)^7 : (a^3b^4c^{12}d) = a^{11}b^3c^{16}d^6$

19) $\left(\frac{a^3b^4c^5}{ab^3c^2}\right)^4 = a^8b^4c^{12}$

20) $\left[(a^6b^3c^4de^5)^4 : (a^2bc^3e)^3\right]^2 = a^{36}b^{18}c^{14}d^8e^{34}$

21) $\frac{(abcd)^{10} \,.\, a^4 \,.\, b^3}{c^2d} = a^{14}b^{13}d^8d^9$

22) $\left[(a^4)^5 \,.\, (a^3)^2\right]^6 : (a^{12})^4 = a^{108}$

23) $\left(\frac{a^2b^3}{cd^4}\right)^2 . \left(\frac{ac}{b}\right)^2 . \left(\frac{ad^2}{bc}\right)^3 = \frac{a^3b^7c^3}{d^4}$

24) Welches ist die vierte Proportionale zu

$\left(\frac{a^2b}{c}\right)^3$, $\left(\frac{ac}{b}\right)^2$ und $\left(\frac{b^2}{ac}\right)^5$? A. $\frac{b^5}{a^9}$

VII. Wurzeln aus Potenzen.

1) $\sqrt{a^6} = a^3$ 2) $\sqrt[5]{a^{20}} = a^4$ 3) $\sqrt[11]{a^6 \,.\, a^5} = a$

4) $\sqrt[6]{(a^5 \,.\, a^3 \,.\, a)^4} = a^6$ 5) $\sqrt[3]{(a^{11} : a^5)} = a^2$

6) $\sqrt{[a^9b^{13}c^2 : a^3b^5]} = a^3b^4c$

7) $\sqrt[4]{\left(\frac{a^{13}}{b^{15}} : \frac{a}{b^7}\right)} = \frac{a^3}{b^2}$

8) $\sqrt[6]{(a^{15}b^{13} : a^9b)} = ab^2$

9) $\sqrt{\left[\left(\frac{a^4b^3}{c^3}\right)^3 . \frac{(ab)^2}{c^4} . c\right]} = \frac{a^7b^4}{c^6}$

10) $\sqrt[3]{(a^4 : a)^5 : (a^6 b)^3} = \frac{b}{a}$

11) $\sqrt[9]{\left((a^6)^2\right)^3} = a^4$

12) $\sqrt[5]{[(a^4 : a)^5 \,.\, (a^3)^2 \,.\, \sqrt{a^3 a^5}]} = a^5$

13) $\sqrt[4]{\left[\frac{a^6 b^2}{ab} \cdot \frac{a^5 b^7}{a^2 b^4}\right]} = a^2 b$

14) $\sqrt{\left[\frac{a^4}{b^5} \cdot \frac{a^7}{b^2} : \left(\frac{b}{a}\right)^3\right]} = \frac{a^7}{b^5}$

15) $\sqrt[7]{\left((a^7)^2\right)^3} = a^6$ 16) $\sqrt[11]{[(a^4)^2 \,.\, (a^3)^7 \,.\, (a^5)^3]} = a^4$

17) $\sqrt{\sqrt{a^6} \,.\, \sqrt[3]{a^{12}} \,.\, \sqrt[5]{a^5}} = a^4$

18) $\sqrt{[(a^2 b)^3 \,.\, (ab^5)^2 \,.\, b]} = a^4 b^7$

19) $\sqrt{[(a^3 b^4 c^6)^2 \,.\, (a^5 b c^3)^5 : (ab^3 c^7)^3]} = a^{14} b^2 c^3$

20) $\sqrt[4]{\left[\left(\frac{a^5 b}{c^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^9 b^3}{c}\right)^4 : \left(\frac{a^5 c^3}{b}\right)^6\right]} = \frac{a^4 b^5}{c^7}$

VIII. Quadratwurzeln aus zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken.

Erhebungen von Polynomen zum Quadrate nach der Formel sind den Wurzelausziehungen voranzuschicken; Beispiele dafür sind leicht zu bilden und die Richtigkeit der Rechnung dadurch zu prüfen, daß man das Quadrat durch wirkliche Multiplication des Polynoms mit sich selbst sucht.

1) $\sqrt{(a^{14}+2a^{12}+a^{10})}=a^7+a^5$

2) $\sqrt{(a^{18}+8a^9b^2+16b^4)}=a^9+4b^2$

3) $\sqrt{\left(\frac{25a^8}{c^6}-\frac{20a^5}{c^7}+\frac{4a^2}{c^8}\right)}=\frac{5a^4}{c^3}-\frac{2a}{c^4}$

4) $\sqrt{\left(\frac{9x^4}{25y^6}-\frac{21x^3}{5y^4}+\frac{49x^2}{4y^2}\right)}=\frac{3x^2}{5y^3}-\frac{7x}{2y}$

5) $\sqrt{(4a^2+16ab+16b^2+8ac+16bc+4c^2)}=2a$
$+4b+2c$

6) $\sqrt{4a^2+20ab+25b^2+12ac+30bc+9c^2)}=2a$
$+5b+3c$

7) $\sqrt{\left(\frac{9x^2}{y^2}-4x-\frac{127y^2}{18}+\frac{5y^4}{3x}+\frac{25}{16x^2}\right)}=\frac{3x}{y}$
$-\frac{2y}{3}-\frac{5y^3}{4x}$

8) $\sqrt{\left(\frac{49x^4}{81}+\frac{28x^3}{27y}-\frac{13x^2}{18y^2}-\frac{x}{y^3}+\frac{9}{16y^4}\right)}=\frac{7x^2}{9}$
$+\frac{2x}{3y}-\frac{3}{4y^2}$

9) $\sqrt{\left(\frac{16a^4}{b^4}-\frac{48a^3}{5b^3}+\frac{1124a^2}{225b^2}-\frac{196a}{15b}+\frac{6074}{405}-\frac{352b}{75a}\right.}$
$\left.+\frac{629b^2}{180a^2}-\frac{21b^3}{5a^3}+\frac{49b^4}{25a}\right)=\frac{4a^2}{b^2}-\frac{6a}{5b}+\frac{4}{9}-\frac{3b}{2a}$
$+\frac{7b^2}{5a^2}$

10) $\sqrt{\left(\frac{9a^4}{4b^2}+\frac{7a^3}{b}+\frac{191a^2}{45}-\frac{421ab}{105}-\frac{238b^2}{75}+\frac{4b^3}{7a}\right.}$
$\left.+\frac{25b^4}{49a^2}\right)=\frac{3a^2}{2b}+\frac{7a}{3}-\frac{2b}{5}-\frac{5b^2}{7a}$

11) $\sqrt{\left(\frac{9a^4}{16b^2} - \frac{a^3}{b} + \frac{35a^2}{18} - \frac{13ab}{3} + \frac{11b^2}{3} - \frac{4b^3}{a} + \frac{4b^4}{a^2}\right)} = \frac{3a^2}{4b} - \frac{2a}{3} + b - \frac{2b^2}{a}$

12) $\sqrt{\left(\frac{49x^4}{9a^2} + \frac{28x^3}{15a} - \frac{338x^2}{75} + \frac{199a^2}{175} - \frac{12a^3}{35x} + \frac{36a^4}{1225x^2}\right)} = \frac{7x^2}{3a} + \frac{2x}{5} - a + \frac{6a^2}{35x}$

13) $\sqrt{(25a^2 + 30ab + 9b^2 + 10ac + 6bc + c^2 + 20ad + 12bd + 4cd + 4d^2)} = 5a + 3b + c + 2d$

14) $\sqrt{\left(\frac{16x^4}{9y^2} + \frac{20x^3}{3y} + \frac{161x^2}{36} + \frac{241y^2}{36} - \frac{5x^3}{3x} + \frac{25y^4}{16x^2}\right)} = \frac{4x^2}{3y} + \frac{5x}{2} - \frac{2y}{3} + \frac{5y}{4x}$

15) $\sqrt{\left(\frac{a^4b^2}{4} + 3a^3 - \frac{54a}{b^4} + \frac{81}{b^6}\right)} = \frac{a^2b}{2} + \frac{3a}{b} - \frac{9}{b^3}$

16) $\sqrt{\left(\frac{25x^4}{9y^2} - \frac{5x^3}{3y} - \frac{13x^2}{12} + \frac{2xy}{5} + \frac{4y^2}{25}\right)} = \frac{5x^2}{3y} - \frac{x}{2} - \frac{2y}{5}$

17) $\sqrt{\left(\frac{9y^2}{4} - \frac{12y^3}{x} + \frac{17y^4}{x^2} - \frac{31y^5}{6x^3} + \frac{61y^6}{9x^4} - \frac{5y^7}{9x^5} + \frac{25y^8}{36x^6}\right)} = \frac{3y}{2} - \frac{4y^2}{x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{5y^4}{6x^3}$

18) $\sqrt{\left(\frac{9x^2}{16y^6} - \frac{5x}{4y^4} - \frac{41}{9y^2} + \frac{143}{6x} - \frac{31y^2}{4x^2} - \frac{84y^4}{x^3} + \frac{144y^6}{x^4}\right)} = \frac{3x}{4y^3} - \frac{5}{6y} - \frac{7y}{2x} + \frac{12y^3}{x^2}$

19) $\sqrt{\left(\frac{25x^4}{4y^6} - \frac{15x^3}{y^4} + \frac{7x^2}{3y^2} + \frac{83x}{6} - \frac{233y^2}{36} - \frac{29y^4}{18x} + \frac{25y^6}{36x^2} - \frac{7y^8}{12x^3} + \frac{y^{10}}{16x^4}\right)} = \frac{5x^2}{2y^3} - \frac{3x}{y} - \frac{4y}{3} + \frac{7y^3}{6x} - \frac{y^5}{4x^2}$

20) $\sqrt{\left(\frac{9a^4}{b^2} - \frac{15a^3}{b} + \frac{149a^2}{20} + \frac{7ab}{2} - \frac{371b^2}{100} + \frac{3b^3}{10a} + \frac{9b^4}{16a^2}\right)} = \frac{3a^2}{b} - \frac{5a}{2} + \frac{b}{5} + \frac{3b^2}{4a}$

21) $\sqrt{\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{4x^3}{y} + \frac{91x^4}{36y^2} + \frac{16x^5}{3y^3} - \frac{253x^6}{48y^4} + \frac{x^7}{y^5} + \frac{4x^8}{y^6}\right)} = \frac{3x}{2} - \frac{4x^2}{3y} + \frac{x^3}{4y^2} + \frac{2x^4}{y^3}$

22) $\sqrt{\left(\frac{4a^4}{49x^2} - \frac{12a^2x}{7} + \frac{61x^4}{7} + \frac{3x^7}{a^2} + \frac{x^{10}}{4a^4}\right)} = \frac{2a^2}{7x} - 3x^2 - \frac{x^5}{2a^2}$

23) $\sqrt{\left(\frac{9x^4}{16y^6} - \frac{x^3}{y^4} - \frac{61x^2}{45y^2} + \frac{38x}{5} - \frac{292y^2}{75} - \frac{48y^4}{5x} + \frac{16y^6}{x^2}\right)} = \frac{3x^2}{4y^3} - \frac{2x}{3} - \frac{6y}{5} + \frac{4y^3}{x}$

24) $\sqrt{(4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4)} = 2x^2 + 2ax + 4b^2$

IX. Cubikwurzeln aus zusammengesetzten Buchstabenausdrücken.

Ueber die Erhebung von Polynomen zum Cubus gilt dasselbe, was über die Erhebung zum Quadrate gesagt ist.

1) $\sqrt[3]{(125a^3 + 225a^2b + 135ab^2 + 27b^3)} = 5a + 3b$

2) $\sqrt[3]{(8a^6 - 36a^5 + 54a^4 - 27a^3)} = 2a^2 - 3a$

3) $\sqrt[3]{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)} = x + 2$

4) $\sqrt[3]{(x^6 - 6ax^5 + 12a^2x^4 - 8a^3x^3)} = x^2 - 2ax$

5) $\sqrt[3]{(8a^3 - 84a^2x + 294ax - 343x^3)} = 2a - 7x$

6) $\sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{c^3}x^3 + \frac{3ab}{c}x^4 - \frac{3a^2c}{b}x^5 + \frac{a^3c^3}{b^3}x^6\right)} =$
$-\frac{b}{c}x + \frac{ac}{b}x^2$

7) $\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2x^2} + \frac{3a^4b}{4c^4x^4} + \frac{a^6}{8c^6x^6}\right)} = b + \frac{a}{2c^2x^2}$

8) $\sqrt[3]{(343c^3 + 294c^2d + 84cd^2 + 8d^3 + 735c^2e}$
$+ 420cde + 60d^2e + 525ce^2 + 150de^2 + 125e^3)$
$= 7c + 2d + 5e$

9) $\sqrt[3]{\left(\frac{27a^6}{8b^3} - \frac{9a^5}{b} + 8a^4b - \frac{64a^3b^3}{27}\right)} = \frac{3a^3}{2b}$
$-\frac{4ab}{3}$

10) $\sqrt[3]{\left(\frac{27a^3c^3}{64b^6} - \frac{3a^4}{8b^3} + \frac{a^5}{9c^3} - \frac{8a^6b^3}{729c^6}\right)} = \frac{3ac}{4b^2}$
$-\frac{2a^2b}{9c^2}$

11) $\sqrt[3]{\left(\frac{8x^9y^3}{27} + \frac{4x^8y^4}{3} - \frac{10x^7y^5}{3} - 15x^6y^6 + 20x^5y^7\right.}$
$\left. + 48x^4y^8 - 64x^3y^9\right) = \frac{2x^3y}{3} + x^2y^2 - 4xy^3$

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{125\,a^9b^6}{8c^3} - \frac{25\,a^8b^7}{c^4} + \frac{40\,a^7b^8}{3\,c^5} - \frac{64\,a^6b^9}{27\,c^6}\right)} = \frac{5\,a^3b^2}{2c} - \frac{4\,a^2b^3}{3c^2}$

13) $\sqrt[3]{(216\,a^{12} + 324\,a^{10}b^2 - 54\,a^8b^4 - 189\,a^6b^6 + 18a^4b^8 + 36\,a^2b^{10} - 8\,b^{12})} = 6a^4 + 3\,a^2b^2 - 2\,b^4$

14) $\sqrt[3]{(8x^6 + 36\,x^5 + 6\,x^4 - 117\,x^3 - 12\,x^2 + 144\,x - 64)} = 2x^2 + 3\,x - 4$

15) $\sqrt[3]{\left(\frac{125\,x^3y^3}{216} + \frac{25\,x^4y^2}{9} + \frac{245\,x^5y}{72} - \frac{26\,x^6}{27} - \frac{49\,x^7}{24\,y} + \frac{x^8}{y^2} - \frac{x^9}{8y^3}\right)} = \frac{5\,xy}{6} + \frac{4\,x^2}{3} - \frac{x^3}{2y}$

16) $\sqrt[3]{(64\,x^6 + 96\,x^5y^2 - 96\,x^4y^4 - 136\,x^3y^6 + 72x^2y^8 + 54\,xy^{10} - 27\,y^{12})} = 4\,x^2 + 2\,xy^2 - 3\,y^4$

17) $\sqrt[3]{\left(27\,a^6 + 54\,a^5b + 9\,a^4b^2 - 136\,a^3b^3 - 147\,a^2b^4 + 30\,ab^5 + 191\,b^6 + \frac{84\,b^7}{a} - \frac{48\,b^8}{a^2} - \frac{64\,b^9}{a^3}\right)} = 3\,a^2 + 2ab - b^2 - \frac{4\,b^3}{a}$

18) $\sqrt[3]{\left(\frac{125\,x^3}{27\,y^3} - \frac{25\,x}{2} + \frac{355\,y^3}{36\,x} - \frac{7\,y^6}{8\,x^3} - \frac{71\,y^9}{72\,x^5} - \frac{y^{12}}{8\,x^7} - \frac{y^{15}}{216\,x^9}\right)} = \frac{5\,x}{3\,y} - \frac{3\,y^2}{2\,x} - \frac{y^5}{6\,x^3}$

19) $\sqrt[3]{\left(\frac{729\,a^6}{c^3} - \frac{729\,a^5}{c^2} + \frac{162\,a^4}{c} + 27\,a^3 - 6\,a^2c - ac^2 - \frac{c^3}{27}\right)} = \frac{9\,a^2}{c} - 3\,a - \frac{c}{3}$

20) $\sqrt[3]{(125x^9 - 300yx^8 + 465y^2x^7 - 574y^3x^6 + 519y^4x^5 - 384y^5x^4 + 204y^6x^3 - 102y^7x^2 + 36y^8x - 8y^9)} = 5x^3 - 4yx^2 + 3y^2x - 2y^3$

Neuntes Kapitel.

Rechnungen mit Buchstabengrößen, bei denen auch Potenzen mit negativen und mit gebrochenen Exponenten vorkommen.

I. Beispiele zur Erläuterung der Bedeutung der negativen und gebrochenen Exponenten.

1) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 2) $a^2b^{-3} = \frac{a^2}{b^3}$ 3) $a\,b^{-1} = \frac{a}{b}$

4) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ 5) $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{b^3}$ 6) $c^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{c^m}$

7) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ 8) $b^{\frac{r}{p}}a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[p]{b^r}\sqrt[n]{a^q}$ 9) $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

10) $y^{\frac{2}{5}}z^{-2} = \frac{\sqrt[5]{y^2}}{z^2}$ 11) $a^{-\frac{1}{2}}b^2 = \frac{b^2}{\sqrt{a}}$ 12) $\frac{1}{a^{-4}} = a^n$

13) $\frac{1}{x^{-\frac{n}{m}}} = \sqrt[m]{a^n}$ 14) $\frac{1}{y^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt[2]{y}$ 15) $\frac{a^{-3}}{b^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{b^3}}{a^3}$

16) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-2} = \frac{1}{\left[\sqrt[3]{a^2}\right]^2}$ 17) $\left(a^{-\frac{n}{m}}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^2}$

18) $\left(\frac{a^{-5}}{b^2}\right)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{b^2 a^5}\right)^3}$

19) $\left(a^{\frac{m}{p}} c^{-\frac{r}{n}} b^{-s} d^{-t} e^{\frac{1}{v}}\right)^{\frac{u}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{\sqrt[p]{a^m}\sqrt[v]{e}}{\sqrt[n]{c^r b^s d^t}}\right)^u}$

20) $\left(\frac{x^2 \cdot y^{-3} \cdot p^{\frac{5}{8}} \cdot q}{z^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{3}{4}} \cdot r^{-5}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left[\frac{x^2 \cdot \sqrt[8]{p^5} \cdot q \sqrt{z} \cdot r^5}{\sqrt[4]{v^3}\, y^3}\right]^3}$

21) $\frac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{b}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ 22) $\sqrt[7]{\left(\sqrt[2]{a^5}\right)^3} = \left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{7}}$

Bei den folgenden Beispielen soll die Transformation immer so geschehen, daß die Bruchform vermieden wird.

23) $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[r]{b^q}} = a^{\frac{m}{n}}\, b^{-\frac{q}{r}}$

24) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{c^2}\sqrt[6]{d}}} = \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{-\frac{2}{5}} d^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}$

25) $\sqrt[11]{\left(\frac{\sqrt[5]{a^2 b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{c}\sqrt[3]{d^5}}\right)^4} = \left[(a^2 b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}} c^{-\frac{1}{2}} d^{-\frac{5}{3}}\right]^{\frac{4}{11}}$

26) $\left(\frac{\sqrt[r]{\left(\sqrt[p]{a^n}\ \sqrt[q]{b}\right)^m}}{\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{c^m}\right)^p}}\right)^s = \left(\left(a^{\frac{n}{p}} b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{m}{r}} \left(c^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}}\right)^s$

27) $\frac{a^n b^m}{c^r} + \frac{a^{n-1}\sqrt[m-1]{b^r}}{\sqrt[s+1]{c^p}} = a^n b^m c^{-r} + a^{n-1} b^{\frac{r}{m-1}} c^{-\frac{p}{s+1}}$

28) $\left(\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[6]{\sqrt{a^5}}}}\right)^8 = \left(\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{8}{7}}$

29) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)^5} = \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{5}{7}}$

30) $\frac{a}{b} + \sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}} - \sqrt[6]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{b^4}}} = ab^{-1} + (a^2 b^{-3})^{\frac{1}{5}}$
$- \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{6}}$

II. Multiplication.

1) $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{4}}$ *) $= a^{\frac{17}{12}} = aa^{\frac{5}{12}}$

---

*) Sind die Factoren als Potenzen mit gebrochenen Exponenten angegeben, so soll auch das Product diese Form haben; sind aber die Factoren mit Wurzelzeichen versehen, so soll dasselbe auch bei dem Producte stattfinden.

2) $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{r}{q}} = a^{\frac{mq+nr}{nq}}$

3) $\sqrt[3]{a^5}\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^{13}} = a^2\sqrt[6]{a}$

4) $\sqrt[p]{a^q}\,\sqrt[n]{a^v} = \sqrt[np]{a^{qn+pv}}$

5) $(a^3 b^4)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{2}} b^{-2}$

6) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{5}}}$

7) $\dfrac{3a^5b^{\frac{3}{2}}}{4c^{\frac{5}{4}}} \cdot \dfrac{2a^{\frac{4}{3}}b^{-4}}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{2}{3}}}{9c^{-\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{79}{12}}b^{-\frac{19}{6}}}{6c^{\frac{17}{12}}}$

8) $\dfrac{\sqrt{a^5}}{\sqrt[3]{a^4}} = a\sqrt[6]{a}$ 9) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}}\right) \times \dfrac{\sqrt{a}}{2} = \dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{2}$

10) $\dfrac{\sqrt[7]{a^2b^3c^5}}{\sqrt[5]{a^2bc^3}} = \dfrac{\sqrt[35]{b^8}\sqrt[35]{c^4}}{\sqrt[35]{a^4}} = \dfrac{\sqrt[35]{b^8c^4}}{a^4} = \sqrt[35]{\left(\dfrac{b^2c}{a}\right)^4}$

11) $(-ba^{-5})\left(-\dfrac{d}{a^7}\right)\left(\dfrac{10}{a^{-1}}\right) = \dfrac{10\,bd}{a^{11}}$

12) $\left(\dfrac{2}{a^3}\right)\left(\dfrac{7}{a^9}\right)\left(-\dfrac{a^6}{14}\right) = -a^{-6}$

13) $\dfrac{2a^8}{3c^3} \cdot \dfrac{5a^{-7}}{b^{-1}} \cdot \dfrac{b^{-2}}{a^2c^{-2}} \cdot \dfrac{4b^3c^{-4}}{5} = \dfrac{8b^2}{3ac^5}$

14) $\dfrac{3a^3b^2d^{-5}}{5c^{-1}e^2} \cdot \dfrac{5d^3b^{-1}f^{-3}}{2a^{-2}c^2e^{-1}} \cdot \dfrac{4b^3fe}{7a^{10}cd^{-7}} \cdot \dfrac{7a^5c^2d^{-5}}{3b^4f^{-2}} = 2$

15) $\dfrac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^4}\ \sqrt[4]{a^5}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

16) $\dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[r]{a^p}} = \sqrt[nr]{a^{mr-np}}$ 17) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}\,\sqrt{b^3}}{\sqrt[8]{a^{11}}\sqrt[3]{b^5}} = \dfrac{\sqrt[24]{a^{23}}}{\sqrt[6]{b}}$

18) $(4a^{-2} - 16a^{-1}x^{-1} + 3x^{-2}) \times (5a^{-3} - 2a^{-2}x^{-1})$
$= 20a^{-5} - 88a^{-4}x^{-1} + 47a^{-3}x^{-2} - 6a^{-2}x^{-3}$

19) $(15a^{-2}b^2 - 7a^{-3}b^4 + 6a^{-4}b^6) \times (8a^{-2}b^2$
$- 3a^{-1}b^4) = 120a^{-8}b^4 - 101a^{-7}b^6 + 69a^{-6}b^8$
$- 18a^{-5}b^{10}$

20) $(\frac{3}{2}x^2y^{-1} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y + \frac{1}{2}x^{-1}y^2) \times (6xy^{-1} + \frac{8}{3}$
$- \frac{1}{2}x^{-1}y) = 9x^3y^{-2} - \frac{361}{36}x + \frac{47}{24}x^{-1}y^2 - \frac{1}{4}x^{-2}y^3$

21) $(a^2b^{-4} + ab^{-3} - b^{-2} - a^{-1}b^{-1}) \times (a^{-2}b^2$
$- a^{-3}b^3 + a^{-4}b^4) = b^{-2} - a^{-2} + a^{-3}b - a^{-5}b^3$

22) $(\frac{4}{3}a^{-4}x^3 - \frac{1}{2}a^{-3}x^2 - \frac{3}{5}a^{-2}x) \times (2a^2x^{-1} +$
$\frac{3}{4}a^3x^{-2} - \frac{5}{3}a^4x^{-3}) = \frac{8}{3}a^{-2}x^2 - \frac{1367}{360} + \frac{23}{60}ax^{-1}$
$+ a^2x^{-2}$

23) $\left(\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[3]{b}\right) \times \left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b^3}\right) = \sqrt[10]{a^{11}} - \sqrt{a}\sqrt[3]{b}$
$- \sqrt[5]{a^3}\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[12]{b^{13}}$

24) $\left[\dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b^2}} + \dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{2\sqrt[3]{b}} - 5a\right] + \left[\dfrac{3b^2}{\sqrt[4]{a^3}} - \dfrac{\sqrt[3]{b^7}}{2\sqrt{a}}\right] =$

$\dfrac{2\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[4]{a}} + \dfrac{7\sqrt[3]{b^5}}{6} - \dfrac{61\sqrt[4]{a}\,b^2}{4} + \dfrac{5\sqrt{a}\sqrt[3]{b^7}}{2}$

25) $\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}+\frac{2\sqrt[4]{a}}{3\sqrt[3]{b}}\right]\times\left[\frac{5\sqrt[3]{b^4}}{2\sqrt[4]{b^3}}-\frac{3\sqrt[3]{b^5}}{a}\right]=\frac{5\sqrt[3]{b^2}}{2\sqrt[4]{a}}$

$-\frac{4b}{3\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[4]{a^3}}$

26) $\left[\frac{2x\sqrt[9]{x^2}}{3y\sqrt[6]{y}}-\frac{5\sqrt[9]{x^5}}{4\sqrt[12]{y^5}}-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[9]{x}}+\frac{y\sqrt[12]{y}}{6\sqrt[9]{x^7}}\right]\times\left[\frac{3\sqrt[5]{x^2}}{2\sqrt[12]{y^5}}\right.$

$\left.-\frac{6\sqrt[3]{y}}{\sqrt[15]{x^4}}\right]=\frac{x\sqrt[45]{x^{28}}}{y\sqrt[12]{y^7}}-\frac{47\sqrt[45]{x^{43}}}{8\sqrt[6]{y^5}}+\frac{6\sqrt[45]{x^{13}}}{\sqrt[12]{y}}+\frac{25\sqrt[3]{y^2}}{4\sqrt[45]{x^{17}}}$

$-\frac{y\sqrt[12]{y^5}}{x\sqrt[45]{x^2}}$

27) $\left[\frac{2\sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt{y}}-\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{y}}{4}-\frac{5y}{\sqrt[3]{x^2}}\right]\times\left[\frac{6\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{y}}-\frac{2\sqrt{y}}{5\sqrt[3]{x}}\right]=$

$\frac{4x^2}{\sqrt[4]{y^3}}-\frac{53x}{30}-\frac{299\sqrt[4]{y^3}}{10}+\frac{2\sqrt{y^3}}{x}$

28) $\left[\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[9]{y^4}}-\frac{4}{\sqrt[6]{x}\sqrt[9]{y}}-\frac{\sqrt[9]{y^2}}{6x}+\frac{5\sqrt[9]{y^5}}{4x\sqrt[6]{x^5}}\right]\times\left[\frac{6\sqrt[6]{x}}{\sqrt[27]{y^4}}\right.$

$\left.-\frac{3\sqrt[27]{y^5}}{2\sqrt[3]{x^2}}\right]=\frac{4\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[27]{y^{16}}}-\frac{25}{\sqrt[27]{y^7}}+\frac{5\sqrt[27]{y^2}}{\sqrt[6]{x^5}}+\frac{31\sqrt[27]{y^{11}}}{4x\sqrt[3]{x^2}}$

$-\frac{15\sqrt[27]{y^{20}}}{8x^2\sqrt{x}}$

29) $\left[\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{5y\sqrt[12]{y^7}}+\frac{\sqrt[8]{x}}{2y}-\frac{6}{\sqrt{x}\sqrt[12]{y^5}}-\frac{2\sqrt[6]{y}}{3x\sqrt[8]{x}}\right]\times\left[\frac{10x}{\sqrt[4]{y^3}}\right.$

$\left.-\frac{\sqrt[8]{x^3}}{2\sqrt[6]{y}}-\frac{\sqrt[12]{y^5}}{\sqrt[4]{x}}\right]=\frac{8x\sqrt[4]{x^7}}{y^2\sqrt[3]{y}}+\frac{23x\sqrt[8]{x}}{5y\sqrt[4]{y^3}}-\frac{1221\sqrt{x}}{20y\sqrt[6]{y}}$

$-\frac{25}{6\sqrt[12]{y^7}\sqrt[8]{x}}+\frac{19}{3\sqrt{x^3}}+\frac{2\sqrt[12]{y^7}}{3x\sqrt[8]{x^3}}$

30) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)\times\left(\frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{3}{2}}}{4}-\frac{a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{5}\right)=\frac{a^{-\frac{2}{3}}b^2}{12}$

$+\frac{7a^{-1}b}{120}-\frac{a^{-\frac{4}{3}}}{10}$

31) $(3\sqrt{a}+2a-\sqrt{a^3})\times\left(\frac{2}{\sqrt{a}}+1-\sqrt{a}\right)=6$

$-7\sqrt{a}-3a-3\sqrt{a^3}+a^2$

32) $\left[\frac{5\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{y^2}}+\frac{\sqrt[12]{x}\sqrt[3]{y}}{2}-\frac{3\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[12]{x^7}}-\frac{2\sqrt[3]{y^7}}{3\sqrt[4]{x^5}}\right]\times\left[\frac{6\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{y}}\right.$

$\left.-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{6\sqrt{x}}\right]=\frac{30\sqrt[12]{x^{11}}}{y}+\frac{13\sqrt[3]{x}}{6}-\frac{217y}{12\sqrt[12]{x^5}}-\frac{7y^2}{2\sqrt[12]{x^{13}}}$

$+\frac{y^3}{9\sqrt[4]{x^7}}$

33) $\left[\frac{15x^2}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{y}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[4]{y}}{3x^2}\right] \times \left[\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y^3}} - \frac{3}{x\sqrt[4]{y^5}}\right] = \frac{15\sqrt[3]{x^7}}{y^2} - \frac{41x}{2\sqrt[4]{y^7}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x}\sqrt{y^3}} + \frac{16}{3\sqrt[3]{x^5}\sqrt[4]{y^5}} + \frac{1}{x^3y}$

III. Division.

1) $a^3 : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ 2) $-a^{-\frac{3}{4}} : a^2 = -a^{-\frac{11}{4}}$

3) $a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$ 4) $\frac{-a^{\frac{3}{5}}}{-a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{10}}$

5) $\frac{a^2b^{-\frac{2}{7}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^3} = a^{\frac{5}{2}}b^{-\frac{23}{7}}$ 6) $\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}} : \frac{b^2}{a^{-\frac{1}{4}}} = a^{-\frac{11}{12}}b^{-\frac{3}{2}}$

7) $\sqrt[5]{a^2} : -\sqrt[3]{a} = -\sqrt[15]{a}$ 8) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$

9) $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[r]{a^p}} = \sqrt[nr]{a^{mr-pn}}$ 10) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{c}} : \sqrt[5]{b} = \frac{\sqrt[30]{b^{29}}}{\sqrt[6]{c^5}}.$

11) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[6]{a^5}\,\sqrt[3]{b}\,\sqrt{c}} : \frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[5]{b^2}\sqrt[9]{c^7}}{\sqrt[3]{a}\,\sqrt[10]{b^3}\sqrt[6]{c}} = \frac{\sqrt[12]{a}\sqrt[15]{b}}{\sqrt[9]{c^4}}$

12) $\frac{2a^4}{7b^3} : \frac{b^{-1}}{7a^{-2}} = \frac{2a^2}{b^2}$ 13) $\frac{14}{5}a^{-8} : (-3a) = -\frac{14}{15}a^{-9}$

14) $\frac{32\,a^{-3}}{b^4\,c^{-2}} : \frac{16\,a^4}{b^{-3}c} = \frac{2\,c^3}{a^7\,b^7}$ 15) $x^4 \cdot x^{-5} \cdot x^{-1} : x^{-5} = x^3$

16) $\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{b}} : \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{b^8}}{\sqrt[12]{a^{11}}}$

17) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}} : \frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a}} = 1$

18) $[\frac{3}{2}x^{-3} - \frac{5}{4}x^{-2} - 8x^{-1} + 9] : [\frac{1}{2}x^{-1} - 1] = 3x^{-2} + \frac{7}{2}x^{-1} - 9$

19) $[\frac{1}{5}a^{-7}b^2 - \frac{47}{40}a^{-6}b^3 + \frac{9}{2}a^{-5}b^4 - 12a^{-4}b^5] : [\frac{2}{5}a^{-3}b^2 - \frac{3}{4}a^{-2}b^3 + 6a^{-1}b^4] = \frac{1}{2}a^{-4} - 2a^{-3}b$

20) $\left[\frac{a^{-5}}{2x^{-1}} - \frac{209a^{-4}}{120} - \frac{7a^{-3}x^{-1}}{12} + \frac{5a^{-2}x^{-2}}{16}\right] ; \left[\frac{a^{-3}}{3x^{-2}} - \frac{5\,a^{-2}}{4\,x^{-1}}\right] = \frac{3\,a^{-2}x^{-1}}{2} + \frac{2\,a^{-1}x^{-2}}{5} - \frac{x^{-3}}{4}$

21) $\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}}{2\,y^{\frac{1}{3}}} - \frac{17\,a^{\frac{1}{2}}}{12\,y^{\frac{2}{3}}} - \frac{1381\,a^{\frac{1}{4}}}{144\,y} + \frac{7}{6\,y^{\frac{4}{3}}} - \frac{15}{4\,y^{\frac{5}{3}}\,a^{\frac{1}{4}}}\right] : \left[\frac{2\,a^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3\,y} + \frac{3}{4\,y^{\frac{4}{3}}\,x^{\frac{1}{4}}}\right] = \frac{a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{4} - \frac{2\,a^{\frac{1}{4}}}{3} - \frac{5}{y^{\frac{1}{3}}}$

22) $\left[\frac{\sqrt[4]{b^3}}{a} - \frac{2}{\sqrt[4]{b}} + \frac{a}{\sqrt[4]{b^5}}\right] : \left[\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[3]{a}} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{b^3}}\right] = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$

23) $\left[\frac{\sqrt[8]{a}\sqrt{b^7}}{2} + \frac{11\sqrt[6]{b^{29}}}{12\sqrt[8]{a}} - \frac{\sqrt[6]{b^{37}}}{6\sqrt[8]{a^3}}\right] : \left[\frac{b^4}{4\sqrt[8]{a^5}} + \frac{\sqrt[3]{b^{16}}}{2\sqrt[8]{a^7}}\right]$

$= \frac{2\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}\sqrt[6]{b^5}}{3}$

24) $[\sqrt{a^5} - \sqrt{b^5}] : [\sqrt{a} - \sqrt{b}] = a^2 + \sqrt{a^3b} + ab + \sqrt{ab^3} + b^2$

25) $\left[\frac{4a\sqrt[6]{a}}{5b\sqrt[20]{b^{17}}} - \frac{7}{3\sqrt[6]{a}\sqrt[5]{b^3}} - \frac{203\sqrt[20]{b^{13}}}{10a\sqrt{a}} + \frac{2b\sqrt[10]{b^9}}{a^2\sqrt[6]{a^5}}\right] :$

$\left[\frac{6\sqrt{a}}{5b\sqrt[10]{b}} - \frac{8\sqrt[20]{b^3}}{\sqrt[6]{a^5}}\right] = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt[4]{b^3}} + \frac{5\sqrt{b}}{2\sqrt[3]{a^2}} - \frac{b\sqrt[4]{b^3}}{4a^2}$

26) $\left[\frac{3x\sqrt[9]{x^5}}{2\sqrt[5]{y^4}} - \frac{233\sqrt[18]{x^{13}}}{18\sqrt[20]{y}} + \frac{77\sqrt[20]{y^{29}}}{9\sqrt[18]{x^{17}}} + \frac{20y^2\sqrt[5]{y}}{x\sqrt[9]{x^7}}\right.$

$\left. - \frac{32y^2\sqrt[20]{y^{19}}}{3x^2\sqrt[18]{x^{11}}}\right] : \left[\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt{y}} - \frac{6\sqrt[4]{y}}{\sqrt[6]{x}} + \frac{8y}{3x}\right] = \frac{9\sqrt[9]{x^8}}{4\sqrt[10]{y^3}}$

$+ \frac{5\sqrt[18]{x}\sqrt[20]{y^9}}{6} - \frac{3y\sqrt[5]{y}}{2\sqrt[9]{x^7}} - \frac{4y\sqrt[20]{y^{19}}}{x\sqrt[18]{x^{11}}}$

27) $\left[\frac{4\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[10]{y^9}} + \frac{166\sqrt[12]{x^5}}{45\sqrt{y}} - \frac{29\sqrt[6]{x}}{15\sqrt[10]{y}} - \frac{11\sqrt[10]{y^3}}{6\sqrt[12]{x}} + \frac{5\sqrt[10]{y^7}}{9\sqrt[3]{x}}\right]$

$: \left[\frac{12\sqrt[6]{x}}{5\sqrt[10]{y^3}} - \frac{2\sqrt[10]{y}}{3\sqrt[12]{x}}\right] = \frac{5\sqrt{x}}{3\sqrt[5]{y^3}} + \frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{y}} - \frac{\sqrt[5]{y}}{4} - \frac{5\sqrt[5]{y^3}}{6\sqrt[4]{x}}$

$$28)\ \left[\frac{a}{\sqrt[2]{b^7}} + \frac{5}{12\sqrt[3]{ab^2}} + \frac{53}{8\sqrt[3]{a^5}\sqrt{b}} + \frac{35\,b}{4\,a^3}\right] : \left[\frac{3\sqrt[3]{a}}{2\,b^3} + \frac{7}{4a\sqrt{b^3}}\right] = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt{b}} - \frac{b}{2\sqrt[3]{a^2}} + \frac{5\sqrt{b^5}}{a^2}$$

$$29)\ \left[\frac{3\sqrt[10]{a^7}}{\sqrt[4]{b^5}} - \frac{81\sqrt[10]{a^3}\,\sqrt[4]{b}}{8} - \frac{12\sqrt[4]{b^7}}{\sqrt[10]{a}} + \frac{18\sqrt[4]{b^{13}}}{\sqrt{a}}\right] : \left[\frac{2\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{b}} + \frac{5\sqrt[5]{ab}}{4} - \frac{3\sqrt{b^5}}{\sqrt[5]{a}}\right] = \frac{3\sqrt[10]{a}}{2\sqrt[4]{b^3}} - \frac{6\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[10]{a^3}}$$

IV. Potenzen von Potenzen und Wurzeln aus Potenzen, sowie Quadrat- und Cubikwurzeln aus Polynomen.

1) $(a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$ 2) $a^{-3})^{5} = b^{-15}$ 3) $(c^{-4})^{-\frac{3}{2}} = c^6$

4) $(a^2 b)^{-3} = a^{-6}b^{-3}$ 5) $\left(\frac{a^{-2}}{b^{-5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{5}{3}}}$

6) $\left((a^4)^5\right)^{-2} = a^{-40}$

7) $$\left[\frac{a^{-\frac{3}{4}}\,b^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{5}{3}}}{d^{\frac{1}{4}}\ e^{-\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{11}{12}} = \frac{a^{-\frac{11}{16}}\,b^{\frac{11}{24}}\,c^{\frac{55}{36}}}{d^{\frac{11}{48}}\ e^{-\frac{11}{18}}}$$

8) $$\left[\left[x^{-\frac{1}{2}} \,.\, x^{-\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{3}}\right]^4 = x^{-\frac{10}{3}}$$

9) $\left[xy^{-1}z^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{5}} : \left[x^{-\frac{2}{3}}y^4z^{-\frac{3}{4}}v^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{25}} = x^{\frac{24}{25}}y^{-\frac{44}{25}}z^{-\frac{11}{50}}v^{\frac{12}{25}}$

10) $\left[\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt{a^3}\right]^6 = a^{17}$ 11) $\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6} = \sqrt[5]{a^4}$

12) $\left(\sqrt[5]{a^4\sqrt{b}\sqrt[3]{c}}\right)^4 = \sqrt[5]{a^{16}}\sqrt[5]{b^2}\sqrt[15]{c^4}$

13) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}\right)^5} : \left(\sqrt[4]{a^3}\right)^6 = \frac{1}{\sqrt[3]{a^{11}}}$

14) $\left(\frac{a^2 \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{2}}$ 15) $\left(\frac{\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a^4}}\right)^{-6} = a^2\sqrt[5]{a^3}$

16) $\sqrt[7]{(a^4 : \sqrt{a})^3} = a\sqrt{a}$ 17) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-5}} = b\sqrt[24]{b}$

18) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\ a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}\ a}\right)^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{18}}$ 19) $\left(\frac{\sqrt{a^7}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^5}\sqrt{a^3}}\right)^3 = a^4\sqrt[4]{a}$

20) $\left(\frac{a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{5}}\ b^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = b\sqrt[30]{a^{19}}$ 21) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3}\sqrt[4]{a^5}\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[6]{a^5}\sqrt[8]{a^3}\sqrt[12]{a^{13}}}} = \sqrt[72]{a^{67}}$

22) $\left[\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}}{\left(a^2b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{5}}}\right]^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{1}{2}}$

23) $\sqrt[6]{\left[\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^3}\ \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{a^2b}\sqrt[3]{ab^2}}}\right]^5} = \frac{1}{\sqrt[144]{a^{55}}\sqrt[36]{b^{25}}}$

24) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^4c^5}}{\sqrt{a^3b\sqrt{c}}}} = \sqrt[12]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^5} \cdot \sqrt[24]{c^{17}}$

25) $\left(\dfrac{a^{-4}\ a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{17}{9}} = aa^{\frac{8}{9}}$

26) $\left(\dfrac{\sqrt{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5}}\right)^2 = a\sqrt[6]{a}$

27) $(ab)^2 : (a^{-\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{3}})^4 = a^4\,b^{\frac{2}{3}}$

28) $\left(\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}b^2}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{6}{5}} : \left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{4}}}{a^2\,b^{\frac{5}{6}}}\right)^4 = a^{\frac{43}{5}}b^{\frac{119}{15}} = a^8b^7a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{14}{15}}$

29) $\left(\dfrac{\sqrt{a^2b^4}}{\sqrt[4]{ab^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}\right) : \dfrac{\sqrt[6]{a^4b^3}}{\sqrt{a^3b}} = a\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{b}$

30) $\left[\sqrt[4]{(a^5b^2)^3} \cdot \sqrt[3]{(ab^3)^2} : \sqrt{(a^2b)^3}\right]^3 = b^6a^4\sqrt[4]{a}$

31) $\sqrt{(a^2x^{-2} + 2ab^{-2}x^{-3} + b^{-4}x^{-4})} = ax^{-1}$
$+ b^{-2}x^{-2}$

32) $\sqrt{\left(\frac{25}{4}\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[3]{c} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{c^2}\right)} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}$
$- \frac{1}{3}\sqrt[3]{c}$

33) $\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt[3]{a}}{9x} - \dfrac{4\sqrt[6]{a}\sqrt[5]{z}}{3\sqrt[4]{x^3}\sqrt[3]{b}} + \dfrac{8\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{z^2}}{3\sqrt[3]{b}\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[5]{z^2}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{b^2}}\right.}$
$\left. - \dfrac{4\sqrt[6]{a}\sqrt[5]{z^3}}{\sqrt[3]{b^2}\sqrt[4]{x}} + \dfrac{4\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{z^4}}{\sqrt[3]{b^2}}\right) = \dfrac{2\sqrt[6]{a}}{3\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[5]{z}}{\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{x}} + \dfrac{2\sqrt[6]{a}\sqrt[5]{z^2}}{\sqrt[3]{b}}$

34) $$\sqrt{\left[\frac{25x\sqrt[3]{x}}{16y} + \frac{5}{4\sqrt[6]{x}\sqrt[4]{y}} - \frac{29\sqrt{y}}{4x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3y\sqrt[4]{y}}{x^3\sqrt[6]{x}} + \frac{9y^2}{x^4\sqrt[3]{x^2}}\right]} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt{y}} + \frac{\sqrt[4]{y}}{2\sqrt[6]{x^5}} - \frac{3y}{x^2\sqrt[3]{x}}$$

35) $$\sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{y\sqrt[5]{y^3}} + \frac{3\sqrt[12]{x^7}}{2\sqrt[10]{y^{11}}} + \frac{11\sqrt[12]{x^5}}{48\sqrt[5]{y^3}} - \frac{13\sqrt[4]{x}}{4\sqrt[10]{y}} - \frac{20\sqrt[12]{x\sqrt[5]{y^2}}}{9} + \frac{\sqrt[10]{y^9}}{2\sqrt[12]{x}} + \frac{9y\sqrt[5]{y^2}}{4\sqrt[4]{x}}\right)} = \frac{\sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[5]{y^4}} + \frac{3\sqrt[24]{x^5}}{4\sqrt[10]{y^3}} - \frac{\sqrt[24]{x\sqrt[5]{y}}}{6} - \frac{3\sqrt[10]{y^7}}{2\sqrt[8]{x}}$$

36) $$\sqrt[3]{\left[\frac{8a^{-9}b^6}{27} + \frac{2a^{-5}}{9} + \frac{a^{-1}b^{-6}}{18} + \frac{a^3b^{-12}}{216}\right]} = \frac{2a^{-3}b^2}{3} + \frac{ab^{-4}}{6}$$

37) $$\sqrt[3]{\left[\frac{\sqrt{x^3}}{8y^2} - \frac{\sqrt[4]{x}}{6\sqrt[9]{y^{11}}} + \frac{2}{27x\sqrt[9]{y^4}} - \frac{8\sqrt[3]{y}}{729\sqrt[4]{x^9}}\right]} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt[3]{y^2}} - \frac{2\sqrt[9]{y}}{9\sqrt[4]{x^3}}$$

38) $$\sqrt[3]{\left[\frac{\sqrt{a^3}\sqrt{c}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{b}} - \frac{3a\sqrt[6]{c}\sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[9]{b}} + \frac{3\sqrt{a}\sqrt[9]{b}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{c}} - \frac{\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{x}}{\sqrt{c}}\right]} = \frac{\sqrt{a}\sqrt[6]{c}\sqrt[6]{x}}{\sqrt[9]{b}} - \frac{\sqrt[9]{b}\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{c}}$$

39) $\sqrt[3]{\left[8x + \frac{48\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[4]{a}} + \frac{60\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{a}} - \frac{80\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a^3}} - \frac{90\sqrt[3]{x}}{a}\right.}$

$\left.+ \frac{108\sqrt[6]{x}}{a\sqrt[4]{a}} - \frac{27}{a\sqrt{a}}\right] = 2\sqrt[3]{x} + \frac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{a}} - \frac{3}{\sqrt{a}}$

40) $\sqrt[3]{\left(\frac{64\sqrt[4]{b^{11}}}{125a^2} - \frac{16\sqrt[8]{b^{15}}}{5\sqrt[6]{a^7}} + \frac{476b}{75\sqrt[3]{a}} - \frac{89\sqrt{a}\sqrt[8]{b}}{27}\right.}$

$\left.- \frac{119\sqrt[3]{a^4}}{90\sqrt[4]{b^3}} - \frac{5\sqrt[6]{a^{13}}}{36\sqrt[8]{b^{13}}} - \frac{a^3}{216\sqrt{b^5}}\right) = \frac{4\sqrt[12]{b}}{5\sqrt[3]{a^2}}$

$- \frac{5\sqrt[6]{a}\sqrt[24]{b}}{3} - \frac{a}{6\sqrt[6]{b^5}}$

Zehntes Kapitel.

Rechnungen mit imaginären Größen.

I. Bezeichnung und Bedeutung imaginärer Größen und Absonderung der unter dem Wurzelzeichen vorkommenden vollständigen Quadrate.

1) $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$ 2) $\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$

3) $-\sqrt{-a^2bc^4} = -ac^2\sqrt{-b}$ 4) $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$

5) $\sqrt{-8} = 2\sqrt{-2}$ 6) $\sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$

7) $\sqrt{-63} = 3\sqrt{-7}$ 8) $\sqrt{-\frac{3200}{121}} = \frac{40}{11}\sqrt{-2}$

9) $\sqrt{-\frac{48}{539}} = \frac{4}{7}\sqrt{-\frac{3}{11}}$ 10) $\sqrt{-5{,}67} = 0{,}9\sqrt{-7}$

11) $\sqrt{-\frac{64}{45}} = \frac{8}{3}\sqrt{-\frac{1}{5}}$ 12) $\sqrt{-1352} = 26\sqrt{-2}$

II. Addition und Subtraction.

1) $\sqrt{-a^2} + \sqrt{-b^2} = (a+b)\sqrt{-1}$

2) $\sqrt{-a^2} - \sqrt{-b^2} = (a-b)\sqrt{-1}$

3) $\sqrt{-4} + 2\sqrt{-8} - 3\sqrt{-18} + \sqrt{-50} = 2\sqrt{-1}$

4) $\sqrt{-12} - \sqrt{-27} + \sqrt{-75} = 4\sqrt{-3}$

5) $\sqrt{-147} + 2\sqrt{-5} - \sqrt{-3} - \frac{11}{2}\sqrt{-80} = (6\sqrt{3} - 20\sqrt{5})\sqrt{-1}$

6) $\sqrt{-a^4} + \sqrt{-4a^2b^2} + \sqrt{-b^4} = (a+b)^2\sqrt{-1}$

7) $\sqrt{-a} + b\sqrt{-ac^2} - d\sqrt{-a^3} = (1+bc-ad)\sqrt{-a}$

8) $\sqrt{-7} + \sqrt{-28} - \sqrt{-9} - \sqrt{-175} = -(2\sqrt{7}+3)\sqrt{-1}$

III. Multiplication.

1) $\sqrt{-5}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{-15}$ 2) $\sqrt{-7}\,.\,\sqrt{-21} = -7\sqrt{3}$

2) $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{-ab}$ 4) $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$

5) $a\sqrt{-b}\,.\,c\sqrt{-d}\,.\,e\sqrt{-f} = -ace\sqrt{-bdf} = -ace\sqrt{bdf}\sqrt{-1}$

6) $\sqrt{-3}\sqrt{2}\sqrt{6} = 6\sqrt{-1}$

7) $\sqrt{-5}\sqrt{30}\sqrt{-15}\sqrt{10} = -150$

8) $(\sqrt{-a} - \sqrt{-b} + c\sqrt{-d}] \cdot \sqrt{-e} = -\sqrt{ae} + \sqrt{be}$
$- c\sqrt{de}$

9) $(\sqrt{5} - \sqrt{-3} + \sqrt{-2}) \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{-15} + 3 - \sqrt{6}$

10) $(3 - \sqrt{2} + \sqrt{-3}) \cdot \sqrt{-2} = 3\sqrt{-2} - 2\sqrt{-1} - \sqrt{6}$

11) $(\sqrt{-3} + 2\sqrt{-5}) \cdot (\sqrt{-2} - 3\sqrt{-5}) = -\sqrt{6}$
$- 2\sqrt{10} + 3\sqrt{15} + 30$

12) $(\frac{2}{3} - \sqrt{-\frac{2}{5}}) \cdot (\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{5}{2}}) = -(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}})\sqrt{-1}$

13) $(3 - \sqrt{-2}) \cdot (3 + \sqrt{-2}) = 11$

14) $(2 - \sqrt{-2}) \cdot (2 + \sqrt{2}) = 2(2 - \sqrt{-2} + \sqrt{2} - \sqrt{-1})$

15) $(a - b\sqrt{-1})^2 = a^2 - 2ab\sqrt{-1} - b^2$

16) $(1 - \sqrt{-1})^3 = -2(1 + \sqrt{-1})$

17) $(\sqrt{-b})^4 = b^2$ 18) $(\sqrt{-b})^5 = b^2\sqrt{-b}$

19) $(\sqrt{-b})^6 = -b^3$ 20) $(\sqrt{-b})^7 = -b^3\sqrt{-b}$

21) $(\sqrt{-b})^8 = b^4$ 22) $(\sqrt{-b})^{4n} = b^{2n}$

23) $(\sqrt{-b})^{4n+1} = b^{2n}\sqrt{-b}$

24) $(\sqrt{-b})^{4n+2} = -b^{2n+1}$

25) $(\sqrt{-b})^{4n+3} = -b^{2n+1}\sqrt{-b}$

26) $(\sqrt{-b})^{4n+4} = b^{2n+2}$

IV. Division.

1) $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{-1} = \sqrt{-\frac{a}{b}}$

2) $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

3) $\sqrt{5} : \sqrt{-5} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$

4) $\sqrt{-5} : \sqrt{5} = \sqrt{-1}$ 5) $\sqrt{-5} : \sqrt{-5} = 1$

6) $\frac{8\sqrt{-5}}{5\sqrt{-8}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$ 7) $\frac{1}{\sqrt{-a}} = -\sqrt{-\frac{1}{a}}$

8) $\frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \cdot \sqrt{-c}}{\sqrt{-d}} = -\frac{\sqrt{abc}}{d}$

9) $\frac{2\sqrt{-6} \cdot 3\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}} = 18\sqrt{-2}$

10) $\frac{\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{-1}$

11) $(\sqrt{-18} - \sqrt{-4} + \sqrt{6}) : \sqrt{-2} = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{-3}$

12) $\frac{13}{2 + 3\sqrt{-1}} = 2 - 3\sqrt{-1}$

13) $\frac{12}{2 - \sqrt{-2}} = 2(2 + \sqrt{-2})$

14) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{-1}}{\sqrt{3} + \sqrt{-1}} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$

15) $\frac{6 + \sqrt{-2}}{1 - \sqrt{-2}} = \frac{1}{3}(4 + 7\sqrt{-2})$

16) $\frac{1}{3 - \sqrt{-2} + \sqrt{-1}} = \frac{18 + 5\sqrt{-2} - 4\sqrt{-1} + 3\sqrt{2}}{68}$

V. Quadratwurzel aus einem Binom von der Form
$A + B\sqrt{-1}$.

1) $\sqrt{(1+4\sqrt{-3})} = \sqrt{(1+4\sqrt{3}.\sqrt{-1})} = 2+\sqrt{-3}$

2) $\sqrt{(\frac{3}{4} - \sqrt{-1})} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{-1}$

3) $\sqrt{(-\frac{17}{144} + \sqrt{-1})} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\sqrt{-1}$

4) $\sqrt{(22 - 10\sqrt{-3})} = 5 - \sqrt{-3}$

5) $\sqrt{(-41 + 12\sqrt{-5})} = 2 + 3\sqrt{-5}$

6) $\sqrt{(13 + 132\sqrt{-3})} = 11 + 6\sqrt{-3}$

7) $\sqrt{(a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1})} = a + b\sqrt{-1}$

8) $\sqrt{(a^2b - b^3c + 2ab\sqrt{-bc})} = a\sqrt{b} + b\sqrt{-c}$

9) $\sqrt{\left(\frac{9a}{4} - \frac{a}{9} + a\sqrt{-1}\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{3}\sqrt{-a}$

10) $\sqrt{(3+\sqrt{-2})} = \sqrt{\frac{\sqrt{11}+3}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{11}-3}{2}} . \sqrt{-1}$

Eilftes Kapitel.

Veränderungen in der Form der Buchstaben-ausdrücke.

I. Auflösung der Parenthesen.

1) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2) $(a + b) a - b = a^2 + ab - b$

3) $a + b(a - b) = a + ab - b^2$

4) $a + b a - b = a + ab - b$

5) $[a - a(a + b - c)](a - c) = a^2 - a^3 - a^3 b$
$+ 2a^2c - ac + abc - ac^2$

6) $[a + (a - b) a] c + d = ac + a^2 c - abc + d$

7) $a - [b - (c - d) e + f] = a - b + ce - de - f$

8) $a - b - (c - d) e + f = a - b - ce + de + f$

9) $a - [b - (c - d) e] + f = a - b + ce - de + f$

10) $a - b - [(c - d) e + f] = a - b - ce + de - f$

11) $(a + b)(a - b) - (a + b)(a + b) + (a - b)$
$(a - b) = a^2 - 4ab - b^2$

12) $[(a + b)(a + b) - (a + b)(a - b)] . (a - b)$
$= 2a^2b - 2b^3$

13) $(a - b)(a + b)(a - b) - (a + b)(a - b)(a + b)$
$= -2a^2b + 2b^3$

14) $[a + b(a - b) - a(a + b)] a - [(a - b) a + b] b$
$= a^2 - a^3 - a^2b - b^2$

15) $(a - b)(a - 2b)(2a - b) = 2a^3 - 7a^2b$
$+ 7ab^2 - 2b^3$

16) $(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

17) $a - b - [a - (a - b) + b] = a - 3b$

18) $(-a)(a - b)(-b)(-a - b)(-ab) = a^4b^2$
$- a^2b^4$

19) $(5x - 3y)(2x - 4y) - (3x + y)(x - 2y)$
$= 7x^2 - 21xy + 14y^2$

20) $[(2a + 3b)x - (a - 2b)y][(a + 4b)x + (2a - b)y]$
$= (2a^2 + 11ab + 12b^2)x^2 + (3a^2 + 2ab + 5b^2)xy$
$- (2a^2 - 5ab + 2b^2)y^2$

21) $[(a + 2b)x + (3a - 2b)y][(2a - b)x + (4a + 2b)y[$
$= (2a^2 + 3ab - 2b^2)x^2 + (10a^2 + 3ab + 6b^2)xy$
$+ (12a^2 - 2ab - 4b^2)y^2$

22) $(3a^2 - 2ab + b^2)x^2 - (2a + b^2)x - (a^2 - 3ab + b^2) - [(5a^2 - 3ab - b^2)x^2 + (7a + 2ab)x - (5a^2 - 3b^2)] = (-2a^2 + ab + 2b^2)x^2 - (9a + 2ab + b^2)x + 4a^2 + 3ab - 4b^2$

23) $[(5a^2 - b)x - (3a^2 - 2b)y]\,[(4a^2 - 3b)x + (a^2 + 5b)y] = (20a^4 - 19a^2b + 3b^2)x^2 - (7a^4 - 41a^2b + 11b^2)xy - (3a^4 + 13a^2b - 10b^2)y^2$

24) $[(7 - a)x - (4 + a)y]\,[(5 + 2a)x + (2 - a)y] = (35 + 9a - 2a^2)x^2 - (6 + 22a + a^2)xy - (8 - 2a - a^2)y^2$

II. Bildung von Parenthesen.

1) $a^2b - ac = a(ab - c)$

2) $a^3b^2 - ab^3 = ab^2(a^2 - b)$

3) $a^5b - a^3b^2c + a^4b^3c^2 = a^3b(a^2 - bc + ab^2c^2)$ oder $= a^3b[a(a + b^3c^2) - bc]$ oder auch $= a^3b[a^2 - bc(1 - abc)]$

4) $a^4b^3 - a^4b^2 - a^3b^3 + a^5b = a^3b(ab^2 - ab - b^2 + a^2) = a^3b[(ab - a - b)b + a^2] = a^3b[(a(b - 1) - b)b + a^2]$

5) $a^3b^2c - a^2b^3c^2 + abc^3 = abc(a^2b - ab^2c + c^2) = abc[ab(a - bc) + c^2]$ oder $= abc(a^2b - (ab^2 - c)c)$

6) $20x^4y^3 - 30x^5y^2 + 35x^6y = 5x^4y(4y^2 - 6xy + 7x^2) = 5x^4y[2(2y - 3x)y + 7x^2]$

7) $\frac{8}{9}x^5y^4 - \frac{10}{27}x^3y^2 - \frac{350}{81}xy^2 = \frac{2}{9}[4x^4y^2 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{175}{9}]xy^2 = \frac{2}{9}[4x^4y^2 - \frac{5}{3}(x^2 + \frac{35}{3})]xy^2$

8) $ac - ad + bc - bd = a(c - d) + b(c - d) = (a + b)(c - d)$

9) $6ax - 10ay + 3bx - 5by = 2a(3x - 5y) + b(3x - 5y) = (2a + b)(3x - 5y)$

10) $3 + 3b - a - ab = (3 - a)(1 + b)$

11) $12ax - 10ay - 18bx + 15by = (6x - 5y)(2a - 3b)$

12) $8a - 12b + 4c - 2ad + 3bd - cd = 4(2a - 3b + c) - (2a - 3b + c)d = (2a - 3b + c)(4 - d)$

13) $ad - ae + af + bd - be + bf - cd + ce - cf = (a + b - c)(d - e + f)$

14) $a^2b - a^5b^2 - a^3c^2 + a^6c^3 = a^2[b(1 - a^3b) - ac^2(1 - a^3c)]$

15) $a^6c - a^6bc + da^5 - bda^5 = a^5(1 - b)(ac + d)$

16) $x^4y^2 - x^2y^4 = x^2y^2(x^2 - y^2) = x^2y^2(x + y)(x - y)$

17) $a^3 + 2a^2b + ab^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)^2$

18) $4a^4b - 8a^3b^2 + 4a^2b^3 = 4(a - b)^2a^2b$

19) $4x + 4ax + a^2x - 4y - 4ay - a^2y = (2 + a)^2(x - y)$

20) $a^4 - 2a^2b + b^4 = (a + b)^2(a - b)^2$

III. Vereinigung der Brüche.

1) $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$

2) $a - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$

3) $\frac{b}{c} - a = \frac{b - ac}{c}$

4) $-a-\frac{b}{c}=-\frac{ac+b}{c}$

5) $\frac{x}{y}+\frac{z}{v}=\frac{xv+zy}{yv}$ 6) $\frac{x}{y}+\frac{z}{v}=\frac{xv-zy}{yv}$

7) $\frac{5a^2}{2b}+\frac{3a}{b^2}-\frac{1}{4}=\frac{10a^2b+12a-b^2}{4b^2}$

8) $\frac{a+b}{2c}-\frac{a-b}{3c}=\frac{a+5b}{6c}$

9) $\frac{ab}{cf}-\frac{bc}{fg}-\frac{d-e}{cg}=\frac{abg-bc^2+df-ef}{cfg}$

10) $\frac{3x}{5y^2}-\frac{2x^2}{3yz}-\frac{x^3}{10z^2}=\frac{18xz^2-20x^2yz-3x^3y^2}{30y^2z^2}$

11) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{g}{h}=\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfh}$

12) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}$

13) $x^2-\frac{x}{2y}+\frac{y}{x}-\frac{1+y}{xy}=\frac{2x^3y-x^2+2y^2-2-2y}{2xy}$

14) $\frac{3}{4}-\frac{5}{2x}+\frac{6}{x^2}+\frac{x}{6}=\frac{9x^2-30x+72+2x^3}{12x^2}$

15) $\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]\times\frac{ab}{c}=\frac{a+b}{c}$

16) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}+\frac{g}{h}\right)\left(\frac{i}{k}-\frac{l}{m}\right)=$

$$\frac{(ad-bc)(eh+gf)(im-kl)}{bdfhkm}$$

17) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right):\left(\frac{c}{b}-\frac{a}{d}\right)=\frac{ad-bc}{cd-ab}$

18) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{a^2 + ab + b^2}{a\,b}$

19) $\frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{c}{d}\right)}{\left(b + \frac{a}{d}\right)\left(ac + \frac{1}{a}\right)} = \frac{a(ab + 1)(bd + c)}{b(bd + a)(a^2c + 1)}$

20) $\frac{a^2b}{c} - \frac{ac}{c - d} + \frac{1}{d} =$

$$\frac{a^2b(c - d)d - ac^2d + c(c - d)}{c(c - d)d}$$

21) $\frac{4}{x} + \frac{2}{1 + x} = \frac{2(2 + 3x)}{x(1 + x)}$

22) $\frac{4}{x + 5} - \frac{1}{x + 3} = \frac{3x + 7}{x^2 + 8x + 15}$

23) $\frac{5 + x}{1 - x^2} + \frac{3 - x}{1 + 2x + x^2} = \frac{5 + x}{(1 + x)(1 - x)}$

$+ \frac{3 - x}{(1 + x)(1 + x)} = \frac{8 + 2x + 2x^2}{(1 + x)(1 + x)(1 - x)}$

24) $\frac{a + 3}{2x^2 + x - 3} - \frac{a - 2}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{ax + 13x - 5a}{(x - 1)(2x + 3)(3x - 2)}$

25) $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{3}{(x + 1)(x - 1)}$

$= \frac{3}{x^2 - 1}$

26) $\frac{a}{(x + y)^3} - \frac{b}{(x + y)^2} - \frac{c}{x + y} =$

$$\frac{a - b(x + y) - c(x + y)^2}{(x + y)^3}$$

27) $$\frac{a^3 b}{a-b} - \frac{a^2b^2}{(a-b)^2} - \frac{ab^3}{(a-b)^3} = \frac{a^5b - 2a^4b^2 + a^3b^3 - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^3}{(a-b)^3}$$

28) $$\frac{x}{(1+x)(2-x)} - \frac{2x}{(1-x)(2-x)} - \frac{2-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{-4x^2 + 3x - 4}{(1+x)(1-x)(2-x)}.$$

29) $$\frac{a^n}{(a-b)^{m+r}} - \frac{a^q}{(a-b)^{m+p}} + \frac{a^s}{(a-b)^m} = \frac{a^n(a-b)^p - a^q(a-b)^r + a^s(a-b)^{r+p}}{(a-b)^{m+r+p}}$$

30) $$\frac{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{m}{p}}}{c^{\frac{p}{q}} d^{\frac{m}{n}}} - \frac{a^{\frac{m}{p}} c^{\frac{q}{n}}}{b^{\frac{s}{p}} d^{\frac{m}{n}}} - \frac{d}{a^{\frac{n}{p}} b^{\frac{s}{p}} c^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{n(p+r)}{rp}} b^{\frac{m+s}{p}} - a^{\frac{m+n}{p}} c^{\frac{pn+q^2}{nq}} - d^{\frac{n+m}{n}}}{a^{\frac{n}{p}} b^{\frac{s}{p}} c^{\frac{p}{q}} d^{\frac{m}{n}}}.$$

IV. Aufheben der Brüche.

1) $$\frac{9a^5b^3}{6a^8b} = \frac{3b^2}{2a^3}$$

2) $$\frac{5a^7b^4 - 10a^6b^3}{15a^8b^5 + 25a^5b^4} = \frac{a^2b - 2a}{3a^3b^2 + 5b}$$

3) $$\frac{8x^4y - 6xy^2 + 14x^3y}{12x^3y^2 + 2xy - 4x^2y^3} = \frac{4x^3 - 3y + 7x^2}{6x^2y + 1 - 2xy^2}$$

4) $\frac{4x^2 - x^3 - 11x^4 + 2x^5}{2x^2 - 3x^3} = \frac{4 - x - 11x^2 + 2x^3}{2 - 3x}$

5) $\frac{7a + 7b}{ca + cb} = \frac{7}{c}$

6) $\frac{12a^3c - 4abc}{15a^4b^2 - 5a^2b^3} = \frac{4ac}{5a^2b^2} = \frac{4c}{5ab^2}$

7) $\frac{3a^5b - 6a^3b^2 + 3a^2bc^2d}{4a^3cd^2 - 8abcd^2 + 4c^3d^3} = \frac{3a^2b}{4cd^2}$

8) $\frac{5a^{n+p} - 10a^pb^m + 15a^pc^r}{2a^nb^qc^r - 4b^{m+q}c^r + 6b^qc^{2r}} = \frac{5a^p}{2b^qc^r}$

9) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a + b}{a - b}$

10) $\frac{2a^2 + a - 3}{6a^2 + 5a - 6} = \frac{a - 1}{3a - 2}$

11) $\frac{3x^2 - 2x}{15x^2 + 2x - 8} = \frac{x}{5x + 4}$

12) $\frac{a^2 - ax - 2x^2}{a^2 - 3ax + 2x^2} = \frac{a + x}{a - x}$

13) $\frac{42x^4y - 13x^3y^2 - 40x^2y^3}{36x^2 - 60xy - 75y^2} = \frac{7x^3y - 8xy^2}{6x - 15y}$

14) $\frac{ac - ad - bc + bd}{3ac - 3ad - 2bc + 2bd} = \frac{a - b}{3a - 2b}$

15) $\frac{3a^3 - 10a^2x - ax^2 + 12x^3}{3a^3 + 5a^2x - 18ax^2 + 8x^3} = \frac{a^2 - 2ax - 3x^2}{a^2 + 3ax - 2x^2}$

16) $$\frac{6x^3 - 13x^2y + 14xy^2 - 12y^3}{9x^3 + 8xy^2 + 8y^3} = \frac{2x - 3y}{3x + 2y}$$

17) $$\frac{1 - 6x^2 + x^4}{1 + 4x + 4x^3 - x^4} = \frac{1 - 2x - x^2}{1 + 2x + x^2}$$

Zwölftes Kapitel.

Logarithmen.

I. Bestimmung der Logarithmen zusammengesetzter Ausdrücke.

1) $\lg (ab)^2 = 2(\lg a + \lg b)$

2) $\lg \frac{ab}{c} = \lg a + \lg b - \lg c$

3) $\lg \frac{a^2bc^3}{d^4} = 2\lg a + \lg b + 3\lg c - 4\lg d$

4) $\lg \frac{a^n}{b^m} = n\lg a - m\lg b$

5) $\lg \sqrt[2]{a^5 b^3} = \frac{1}{2}(5\lg a + 3\lg b)$

6) $\lg \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)^5 = 5(\frac{1}{2}\lg a - \frac{2}{3}\lg b)$

7) $\lg (a+b)c^2\sqrt{d-e} = \lg(a+b) + 2\lg c + \frac{1}{2}\lg(d-e)$

8) $\lg (a^5\sqrt{b})^3 \sqrt[3]{c} = 3(5\lg a + \frac{1}{2}\lg b) + \frac{1}{3}\lg c$

9) $\lg \sqrt[p]{\frac{a^n b^m}{c^r}} \cdot \sqrt[q]{d} = \frac{n \lg a + m \lg b - r \lg c}{p} + \frac{\lg d}{q}$

10) $\lg a^n b^{-r} c^{\frac{p}{q}} d^{-\frac{m}{s}} = n \lg a - r \lg b + \frac{p}{q} \lg c - \frac{m}{s} \lg d$

II. Summen, Differenzen, Vielfache und Theile von Logarithmen auszudrücken als Logarithmen von Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln.

1) $\lg a - \lg b + \lg c = \lg \frac{ac}{b}$

2) $\lg a + 2 \lg b - 3 \lg c = \lg \frac{ab^2}{c^3}$

3) $\frac{1}{2}(\lg a - \lg b) = \lg \sqrt{\frac{a}{b}}$

4) $\frac{n}{m}(\lg a + r \lg b - p \lg c) = \lg \sqrt[m]{\left(\frac{ab^r}{c^p}\right)^n}$

5) $\frac{3}{4}(\lg a - \lg b) + \frac{5}{6}(\lg c - \lg d) = \lg \sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} \sqrt[6]{\left(\frac{c}{d}\right)^5}$

6) $\frac{5}{2} \lg a - \frac{2}{3} \lg b - \lg c = \lg \frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt[3]{b^2} \cdot c}$

7) $n \lg (a+b) - m \lg (a-b) = \lg \frac{(a+b)^n}{(a-b)^m}$

8) $\frac{n}{m}(\lg (a-b) - \lg (a+b)) = \lg \sqrt[m]{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n}$

9) $\frac{2}{3}(\lg 4 - \lg 5) = \lg \sqrt[3]{(\frac{4}{5})^2}$

10) $p\lg a + \frac{1}{q}\lg b - \frac{r}{n}\lg(a+b) = \lg \frac{a^p \sqrt[q]{b}}{\sqrt[n]{(a+b)^r}}$

III. Beispiele für die Bestimmung der Logarithmen von Zahlen mit mehr als 5 Ziffern und der Zahlen, die zu gegebenen Logarithmen gehören.

1) lg 5731452 = 6,75826465
2) lg 24,31275 = 1,3858341
3) lg 0,002134 = 0,3291944—3
4) lg 4371945 = 6,6406747
5) lg 0,000245 = 0,3891661—4
6) lg 741,3574 = 2,8700276
7) lg 0,00003174561 = 0,5016836—5
8) lg 3,1415926 = 0,49714987
9) lg 3,086174 = 0,48942046
10) lg 448,866 = 2,6521167
11) lg 0,1234567 = 0,09151466—1
12) lg 917463,1 = 5,9625886...
13) n*) lg 4,8802825 = 75907,117
14) n lg (0,544068—2) = 0,035
15) n lg 8,7048888 = 506860934,7
16) n lg 4,3145645 = 20633,1
17) n lg 2,9713 = 936,0522
18) n lg 0,4321799 = 2,70507875
19) n lg (0,0051345—3) = 0,001011893
20) n lg (0,519828—1) = 0,331

---

*) n lg bedeutet numerus logarithmo respondens.

21) $\text{n lg } 2,2 = 158,48929$

22) $\text{n lg } (0,2 - 2) = 0,015848929$

23) $\text{n lg } 4,6977 = 49854$

24) $\text{n lg } 0,1830 = 1,527214$

25) $\text{n lg } (0,1 - 1) = 0,00001258925$

26) $\text{n lg } 6,3147591 = 2064235$

IV. Wirkliche Berechnung von Zahlenausdrücken mit Hülfe von Logarithmen.

1) $347,1435 \,.\, 2,134712 = 741,0516\ldots$

2) $3,417571 : 1,347051 = 2,537076\ldots$

3) $3,174712^7 = 3250,3537\ldots$

4) $\sqrt[9]{21,71473} = 1,407758\ldots$

5) $\sqrt[12]{\tfrac{2}{3}} = \text{n lg } \dfrac{0,30103 - 0,4771213}{12} = \text{n lg } \dfrac{0,8239087 - 1}{12}$

$= \text{n lg } \dfrac{11,8239087 - 12}{12} = \text{n lg } (0,9853257 - 1)\ldots$

$0,9667754\ldots$

6) $\sqrt[7]{\dfrac{43^5}{51^4}} = 1,552418\ldots$

7) $\sqrt[24]{538} = 1,299519\ldots$

8) $\sqrt[15]{\tfrac{24}{47}} = 0,9561824\ldots$

9) $(\sqrt[3]{1\tfrac{3}{4}})^4 = 2,108874\ldots$

10) $\sqrt{(\tfrac{136}{311} \,.\, 53)^7} = 59936,355\ldots$

11) $\sqrt[30]{(0,0003571642 : 2)} = 0,75$

12) $\sqrt[29]{\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}\right)^{23}} = 0{,}01387709\ldots$

13) $3{,}475^9 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^7 = 253{,}1137\ldots$

14) $\sqrt[5]{\left(\left(\frac{431}{311}\right)^2 \cdot 4713{,}471\right)} = 6{,}1852172\ldots$

15) $\sqrt[5]{\frac{4}{5}} = 0{,}9563524\ldots$

16) $\sqrt[3]{(184{,}7 \cdot 3417417)} = 857{,}8046\ldots$

17) $\sqrt[7]{\left(\left(\frac{4317{,}431}{534{,}4}\right)^5 \cdot 4{,}31\right)} = 5{,}4796\ldots$

18) $\sqrt[6]{0{,}041} = 0{,}5872153$

19) $\sqrt[11]{0{,}45^5} = 0{,}695615\ldots$

20) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = 0{,}7229811\ldots$

21) $\sqrt[3]{\frac{34{,}215}{3512{,}3}} = 0{,}2135707\ldots$

22) $\sqrt[4]{8^5} = 13{,}454343\ldots$

23) $\sqrt[7]{4321941} = 8{,}870622\ldots$

24) $\sqrt[8]{43{,}1^7} = 26{,}92574\ldots$

25) $\sqrt[5]{\frac{3174{,}915}{97{,}23}} = 2{,}0081049\ldots$

26) $\sqrt[7]{\left(\frac{43}{16}\right)^3} = 0{,}527589\ldots$

27) $\sqrt[5]{\left(\frac{6}{7}\right)^4} = 0{,}8839805..$

28) $\sqrt[13]{\frac{3^7}{2^9}} = 1{,}1181653..$

29) $\sqrt[6]{0{,}041^5} = 0{,}069821..$

30) $\sqrt[5]{143{,}1741^3} = 19{,}657068..$

31) $\sqrt[6]{\frac{3^5}{2^8}} = 0{,}9913518..$

32) $\sqrt[7]{\left(\frac{3^4}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{7}}\right)^8\right)} = 1{,}247199..$

33) $\sqrt[4]{\left[\frac{341{,}7135^2}{13{,}47012^3} \cdot \sqrt[5]{2{,}3}\right]} = 2{,}740873..$

34) $\frac{(374{,}5134 \cdot 51{,}43914)^2}{3514{,}784 \cdot 2{,}341471^3} = 8225{,}4045.$

35) $\sqrt[3]{\left(\frac{31^5 \cdot 7^9}{41^4}\right)^2} = 550854{,}125..$

36) $0{,}034^{0,034} = 0{,}891395..$

37) $\sqrt[6]{\left(\frac{345{,}34}{21{,}39751} \cdot 4{,}5^4\right)} = 4{,}333002..$

38) $\left(\sqrt[4]{7{,}31} \cdot \left(\frac{3967452}{5137589}\right)^5\right)^2 = 0{,}203930..$

39) $\dfrac{(\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{4})^6}{(\sqrt[8]{7}\sqrt[10]{9})^{11}} = 0,129674..$

40) $(\sqrt{5} - \sqrt[3]{5,8})\sqrt[5]{4} = 0,57974..$

41) $\dfrac{\sqrt[7]{2} - \sqrt[7]{1,5}}{\sqrt[7]{2} + \sqrt[7]{1,5}} = 0,0205456..$

Dreizehntes Kapitel.

Kettenbrüche.

I. Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Kettenbrüche nebst Angabe der Näherungswerthe.

1) $\frac{1327}{2001} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{31+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2}}}}}}$

Partialwerthe: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{63}{95}, \frac{632}{952}$

2) $\frac{71}{91} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}}$

Partialwerthe: $1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{32}{41}$

3) $\frac{741}{505} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$

Partialwerthe: $1, \frac{3}{2}, \frac{22}{15}, \frac{135}{92}, \frac{157}{107}, \frac{292}{199}$

4) $\frac{10315}{22583} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}}}}}}}$

Partialwerthe: $\frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{16}{35}, \frac{21}{46}, \frac{37}{81}, \frac{169}{370}, \frac{375}{821}, \frac{919}{2012}, \frac{3132}{6857}$

5) $$\frac{1560}{2191} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}}}}$$

Partialwerthe: $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{42}{59},\ \frac{47}{66},\ \frac{89}{125}$

6) $$\frac{134}{315} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

Partialwerthe: $\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{17}{40},\ \frac{20}{47},\ \frac{57}{134}$

7) $$\frac{431}{317} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

Partialwerthe: $1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{15}{11},\ \frac{19}{14},\ \frac{34}{25},\ \frac{121}{89},\ \frac{155}{114}$

8) $\frac{374}{211} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9}}}}}}$

Partialwerthe: $1,\ 2,\ \frac{7}{4},\ \frac{16}{9},\ \frac{23}{13},\ \frac{39}{22}$

9) $\frac{3721}{5819} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{39}}}}}}}}}$

Partialwerthe: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{11},\ \frac{16}{25},\ \frac{39}{61},\ \frac{55}{86},\ \frac{94}{147}$

10) $\frac{30}{43} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}}$

Partialwerthe: $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{10},\ \frac{30}{43}$

11) $\frac{516901}{5225670} = \cfrac{1}{10+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}$

Partialwerthe: $\frac{1}{10}$, $\frac{9}{91}$, $\frac{73}{738}$, $\frac{520}{5257}$, $\frac{3193}{32280}$, $\frac{16485}{166657}$, $\frac{69133}{698908}$, $\frac{223884}{2263381}$

12) $\frac{512200}{10256801} = \cfrac{1}{20+\cfrac{1}{40+\cfrac{1}{80+\cfrac{1}{160}}}}$

Partialwerthe: $\frac{1}{20}$, $\frac{40}{801}$, $\frac{3201}{64100}$

13) $\frac{1234}{56789} = 46 + \cfrac{1}{49+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$

Partialwerthe: $\frac{1}{46}$, $\frac{49}{2255}$, $\frac{99}{4556}$, $\frac{148}{6811}$, $\frac{543}{24989}$

II. Entwickelung der Quadratwurzeln in continuirliche Brüche.

1) $$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Partialwerthe: $2,\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31}$ u. s. w.

2) $$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \ldots}}}$$

Partialwerthe: $4,\ \frac{33}{8},\ \frac{268}{65},\ \frac{2177}{528}$ u. s. w.

3) $$\sqrt{39} = 6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}$$

Partialwerthe: $6,\ \frac{25}{4},\ \frac{306}{49},\ \frac{1249}{200}$ u. s. w.

4) $$\sqrt{37} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}$$

Partialwerthe: $6,\ \frac{73}{12},\ \frac{882}{145},\ \frac{10657}{1752}$ u. s. w.

5) $$\sqrt{119} = 10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\ldots}}}}}}$$

Partialwerthe: $10,\ 11,\ \frac{109}{10},\ \frac{120}{11},\ \frac{2509}{230},\ \frac{2629}{241}$ u. s. w.

6) $$\sqrt{8} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

Partialwerthe: $2,\ 3,\ \frac{14}{5},\ \frac{17}{6},\ \frac{82}{29},\ \frac{99}{35}$ u. s. w.

7) $$\sqrt{56} = 7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$$

Partialwerthe: $7,\ \frac{15}{2},\ \frac{217}{29},\ \frac{449}{60},\ \frac{6503}{869}$ u. s. w.

8) $$\sqrt{22} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}}$$

Partialwerthe: $4,\ 5,\ \frac{14}{3},\ \frac{61}{13},\ \frac{136}{29},\ \frac{197}{42},\ \frac{1712}{365}$ u. s. w.

9) $$\sqrt{34} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

Partialwerthe: $5,\ 6,\ \frac{29}{5},\ \frac{35}{6},\ \frac{379}{65},\ \frac{414}{71}$ u. s. w.

10) $$\sqrt{117} = 10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}}}}}$$

Partialwerthe: $10,\ 11,\ \frac{54}{5},\ \frac{119}{11},\ \frac{530}{49}$ u. s. w.

11) $$\sqrt{54} = 7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

Partialwerthe: $7,\ \frac{15}{2},\ \frac{22}{3},\ \frac{147}{20},\ \frac{169}{23},\ \frac{485}{66}$ u. s. w.

12) $\sqrt{26} = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10 + \dots}}$

Partialwerthe: $5, \frac{51}{10}, \frac{515}{101}, \frac{5201}{1020}, \frac{52525}{10301}$ u. s. w.

Vierzehntes Kapitel.

Bestimmung des Zahlenwerthes von Buchstabenausdrücken, wenn man für die Buchstaben in denselben bestimmte Zahlenwerthe setzt.

Es soll hier zunächst auf die im 11ten Kapitel vorkommenden Buchstabenausdrücke Bezug genommen werden, und, indem man für die einzelnen Buchstaben in denselben bestimmte Zahlenwerthe setzt, kann man sich dann zugleich an einem Beispiele von der Richtigkeit der dort geschehenen Formänderung überzeugen.

1) Was wird aus I, 1—4, wenn man $a = 7$ und $b = 3$ setzt? Antw. Aus 1., wird 40, aus 2., 67, aus 3., 19, aus 4, 25.

2) Was aus 5., indem man $a = 7$, $b = 3$ und $c = 2\frac{1}{2}$ setzt? A. $-204\frac{3}{4}$.

3) Was aus 6.; für $a = 7$, $b = 3$, $c = 2\frac{1}{2}$ und $d = 5$? A. $92\frac{1}{2}$.

4) Was aus 7 — 10 für $a = 8$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 2\frac{1}{2}$, $e = 4$ und $f = 7$? A. Aus 7., wird 10, aus 8., -4, aus 9., 24, aus 10., -18.

5) Was aus 11 — 15 für $a = 9$ und $b = 4$? A. Aus 11., wird -79, aus 12., 520, aus 13., -520, aus 14., -988, aus 15., 70.

6) Was aus 19 für $x = 5$ und $y = 3$? A. -14.

7) Was aus 20 und 21 für $a = 6$, $b = 2$, $x = 5$ und $y = 3$? A. Aus 20., wird 8400, aus 21., 12328.

8) Was aus 22., für $a = 3$, $b = 5$ und $x = 2$? Antw. 5.

9) Was aus 23 für $a = 1$, $b = 3$, $x = 4$ und $y = 5$? A. 1380.

10) Was aus 24 für $a = 4$, $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{3}{4}$? A. $-14\frac{1}{6}$.

11) Welchen Werth bekommt in $x = \frac{3a+b}{c}$ die Größe

x für $a = 2$, $b = 3$ und $c = 5$? A. $1\frac{4}{5}$.
$a = 7$, $b = 5$ und $c = 13$? A. 2
$a = 2\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ und $c = 2$? A. $3\frac{11}{12}$.
$a = 5$, $b = 4\frac{1}{2}$ und $c = 6\frac{1}{2}$? A. 3.
$a = 0{,}2$, $b = 4{,}5$ und $c = 1{,}7$? A. 3.
$a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{4}$ und $c = \frac{1}{6}$? A. $7\frac{1}{2}$.

12) Wenn man in dem Ausdrucke $x = \frac{a(b-c)-b}{a-(b+c)}$ $a = 9$, $b = 4$, $c = 3$ setzt, was bekommt x für einen Werth? A. $2\frac{1}{2}$.

13) Was wird aus x im vorigen Ausdrucke, wenn man $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ und $c = \frac{1}{4}$ setzt? A. $3\frac{1}{2}$.

14) Welchen Werth bekommt in $y = \frac{3x^2-1}{x}$ die

Größe y für $x = 2$? A. $5\frac{1}{2}$
$x = 3$? A. $8\frac{2}{3}$
$x = \frac{3}{4}$? A. $\frac{1}{3}$

15) Welchen Werth erhält in $y = \frac{x(x-1)}{x+1}$ die Größe y für

$x = 1$?	A. 0
$x = 2$?	A. $\frac{2}{3}$
$x = 3$?	A. $1\frac{1}{2}$
$x = 4$?	A. $2\frac{2}{5}$
$x = 5$?	A. $3\frac{1}{3}$
$x = 6$?	A. $4\frac{2}{7}$
$x = 7$?	A. $5\frac{1}{4}$
$x = 8$?	A. $6\frac{2}{9}$

16) Welchen Werth erhält in $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ die Größe y für

$x = 1$?	A. $1\frac{1}{2}$
$x = 2$?	A. $2\frac{1}{3}$
$x = 3$?	A. $3\frac{1}{4}$
$x = 4$?	A. $4\frac{1}{5}$
$x = 10$?	A. $10\frac{1}{11}$
$x = 15$?	A. $15\frac{1}{16}$
$x = \frac{2}{3}$?	A. $1\frac{4}{15}$
$x = 4{,}3$?	A. $4\frac{259}{530}$
$x = a+b$?	A. $\frac{a^2+2ab+b^2+a+b+1}{a+b+1}$
$x = a+1$?	A. $\frac{a^2+3a+3}{a+2}$

17) Welchen Werth erhält in $x = \frac{b(b-1)(b-2)}{b^2(b^2-1)(b^2-2)}$ x, wenn man

$b = 2$ setzt?	A. 0
$= 3$?	A. $\frac{1}{84}$
$= 4$?	A. $\frac{1}{140}$
$= 5$?	A. $\frac{1}{230}$
$= 6$?	A. $\frac{1}{357}$
$= 7$?	A. $\frac{5}{2632}$

18) Welchen Werth erhält in $x = \frac{4a^2 - 3(a-b)}{2a - 5b}$

x, wenn $a = 6$ und $b = 1\frac{1}{2}$ ist? A. 29
$a = 5$ $b = 3$ A. $-18\frac{4}{5}$
$a = 2\frac{1}{3}$ $b = 9$ A. $-1\frac{13}{363}$
$a = 1\frac{2}{7}$ $b = 5\frac{1}{2}$ A. $-\frac{1887}{2443}$
$a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{4}{3}$ A. $\frac{9}{34}$
$a = 2$ $b = -\frac{3}{4}$ A. 1
$a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{3}{16}$ A. 1
$a = \frac{2}{3}$ $b = \frac{2}{27}$ A. 0

19) Welchen Werth erhält in $x = \frac{a(b-c)}{b(a-c)}$ die Größe x für $a = 7$, $b = 3$, $c = 2$? A. $\frac{7}{15}$
$a = 2\frac{1}{2}$, $b = 5$, $c = 7\frac{1}{4}$? A. $\frac{9}{38}$
$a = 3\frac{3}{4}$, $b = 1\frac{1}{2}$, $c = 6$? A. 5
$a = 2\frac{1}{5}$, $b = 2\frac{1}{5}$, $c = 3$ A. 1

20) Welchen Werth erhält der Ausdruck $\frac{n(n+1)(n+2)}{n(n-1)(n-2)}$

für $n = 5$? A. $\frac{7}{2}$
$n = 6$? A. $\frac{14}{5}$
$n = 7$? A. $\frac{12}{5}$
$n = 8$? A. $\frac{15}{7}$
$n = 9$? A. $\frac{55}{28}$
$n = 10$? A. $\frac{11}{6}$

21) Welchen Werth erhält $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-x)}$

für $x = 5$? A. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$

$x = n-1$? A. $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-2)(2n-1)}{(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1}$

$x = 3$ und $n = 7$? A. 42

22) Welchen Werth hat $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x - 1)}{x^2 - 1}$.

für $x = 1$? A. 0
$x = 2$? A. $\frac{4}{3}$
$x = 3$? A. $\frac{9}{4}$
$x = 4$? A. $\frac{16}{5}$
$x = 5$? A. $\frac{25}{6}$
$x = 10$? A. $\frac{100}{11}$

Fährt man nach dem sich evident darstellenden Gesetze fort, was würde der Werth obiges Ausdruckes für $x = x$ sein? Antw. $\frac{x^2}{x+1}$

Dieser Werth ergiebt sich auch sogleich, wenn man bedenkt, daß $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ ist.

23) Welchen Werth erhält $\frac{(3a - 2b)c}{2c - 1}$

für $a = 4$, $b = 2\frac{1}{2}$ und $c = 3$? A. $4\frac{1}{5}$
$a = 4\frac{1}{3}$, $b = -2$ und $c = 1\frac{1}{2}$? A. $12\frac{3}{4}$
$a = b$, $b = b$ und $c = 3$? A. $\frac{3b}{5}$
$a = \frac{2}{3}c$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = c$? A. c

24) Was bekommt in $x = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n^2(n^2-1)(n^2-2)\ldots[n^2-(n-1)]}$

x für einen Werth für $n = 1$? A. 1
$n = 2$? A. $\frac{1}{6}$
$n = 3$? A. $\frac{1}{84}$
$n = 4$? A. $\frac{1}{1820}$
$n = 5$? A. $\frac{1}{53130}$
$n = 6$? A. $\frac{1}{1947792}$

25) Was hat $(-1)^n \cdot n$ für einen Werth

für $n = 1$? A. -1
$n = 2$? A. 2
$n = 3$? A. -3

$n = 4$? A. 4

$n = 2p$, wo p eine ganze Zahl? A. $2p$

$n = 2p+1$? A. $-(2p+1)$

26) Welche Zahlen werden mit $2n^2-1$ bezeichnet sein, wenn n eine ganze Zahl ist?

A. 1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199 u. s. w.

Funfzehntes Kapitel.

Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

1) $4x-3 = x+12$ — $x = 5$

2) $3x+14 = 16x+1$ — $x = 1$

3) $4x+3(x+2) = 6x+6+3$ — $x = 3$

4) $7y-1 = y+2$ — $x = \frac{1}{2}$

5) $2x+1 = 4$ — $x = 1\frac{1}{2}$

6) $4z-3 = 12-z$ — $z = 3$

7) $4(z-1) = 5(6-z)+2$ — $z = 4$

8) $3y+2 = 32-3y$ — $y = 5$

9) $\frac{1}{2}x+3 = 7-x$ — $x = 2\frac{2}{3}$

10) $3(y-2) = 13-16y$ — $y = 1$

11) $5-x = 7-2x$ — $x = 2$

12) $2(x+3) = 8x$ — $x = 1$

13) $\frac{2}{3}(5-x) = x$ — $x = 2$

14) $110(x-1314) = 30x+2340$ — $x = 1836$

15) $17y+1 = 5y+73$ — $y = 6$

16) $\frac{4+x}{3} = x-2$ $\qquad x = 5$

17) $4+z = 3z+3$ $\qquad z = \frac{1}{2}$

18) $13-x = x+1$ $\qquad x = 6$

19) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß sie um eben so viel kleiner ist, als 13, als die in der natürlichen Reihenfolge auf sie folgende Zahl? A. 6.

20) $\frac{1}{2}+x = 32x-46$ $\qquad x = 1\frac{1}{2}$

21) $5(x-1) = 49$ $\qquad z = 10\frac{4}{5}$

22) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß, wenn man sie um 1 verringert und was da herauskommt mit 5 multiplicirt, das Product gleich 49 ist? A. $10\frac{4}{5}$.

23) $3x = x+3$ $\qquad x = 1\frac{1}{2}$

24) Welche Zahl giebt zu 3 addirt eben so viel, als mit 3 multiplicirt? A. $1\frac{1}{2}$

25) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2} = x-1\frac{1}{2}$ $\qquad x = 6$

26) $3\frac{1}{2}+x = 7x-5\frac{1}{2}$ $\qquad x = 1\frac{1}{2}$

27) $5y = 7(y-3)-1$ $\qquad y = 11$

Es wird leicht sein, die Gleichungen von 25 — 27 ähnlich in Worte einzukleiden, wie es mit 18, 21 und 23 geschehen ist. Es werden aber auch folgende Aufgaben zu den Gleichungen 25, 26, 27 führen.

28) Jemand sagt: Wenn ich $1\frac{1}{2}$ Thlr. von meinem Gelde weggebe, so habe ich doch noch $\frac{1}{2}$ Thlr. mehr, als wenn ich den dritten Theil meines Geldes verschenke. Wie viel hat er? Antw. 6 Thlr.

29) Jemand, der von A nach B reist, erfuhr, als er $\frac{2}{3}$ des Weges gefahren und dann noch $\frac{1}{2}$ Meile zu Fuße gegangen war, daß er noch $1\frac{1}{2}$ Meile von B entfernt sei; wie viel Meilen ist A von B entfernt? A. 6 Meilen.

30) Jemand sagt: Wenn man mir für jedes Schock Eier, die ich habe, einen Gulden giebt und noch $3\frac{1}{2}$ Gulden borgt, so habe ich eben so viel Geld, als wenn man mir jedes Schock mit 7 Gulden bezahlte, aber $5\frac{1}{2}$ Gulden darauf schuldig bliebe. Wie viel Schock Eier hatte er? A. $1\frac{1}{2}$ Schock.

31) Als Jemand in einem Spiele $3\frac{1}{2}$ Thlr. gewonnen hatte, fehlten ihm zur Tilgung seiner früheren Spielschulden immer noch $5\frac{1}{2}$ Thlr.; diese Spielschulden betrugen aber auch das Siebenfache von dem, was er zum jetzigen Spiele mitgebracht hatte; wie viel hatte er mitgebracht, und wie viel war er von früher her schuldig? A. Er hatte $1\frac{1}{2}$ Thlr. mitgebracht, war aber von früher her $10\frac{1}{2}$ Thlr. schuldig.

32) Als eine Gesellschaft nach der Rechnung fragte, ergab sich, daß jede Person 5 Sgr. zu bezahlen hatte; da aber 3 Personen freigehalten werden sollten, so gab jeder der übrigen 7 Sgr. und es fand sich, daß dadurch noch ein Sgr. mehr herauskam, als die Rechnung betrug; wie viel Personen zählte die Gesellschaft? A. 11 Personen.

33) Einem Boten, der täglich 5 Meilen geht, wird 3 Tage nachher ein anderer nachgeschickt, der täglich 7 Meilen geht; da die beiden Boten einander unbekannt sind, so geht eines Tages der zweite Bote vor dem ersten vorbei, so daß er am Ende des Tages schon um 1 Meile denselben überholt hat; an welchem Tage nach Abgang des ersten Boten fand dies statt? A. Am 11ten Tage.

34) $37 + x = 131 - x \qquad x = 47$

35) $a + x = b - x \qquad x = \frac{b - a}{2}$

Aufgabe 35 ist die Verallgemeinerung von 34.

36) Zwei Spieler, von denen der eine a Thlr., der andere b Thlr. hat, spielen; als der erstere vom andern so viel gewonnen hatte, daß sie beide gleich viel hatten, hören sie auf; wie viel hatte der eine vom andern gewonnen? A. $\frac{1}{2}$ (b — a) Thlr.

37) $6(x+1) = \frac{10x+4}{3} + 36\frac{2}{3}$ $\quad x = 12$

38) $\frac{3}{4}(13-x) = x - 3$ $\quad x = 7\frac{2}{7}$

39) $ax - b = cx + d$ $\quad x = \frac{b+d}{a-c}$

40) Jemand will, um seine Schulden zu bezahlen, eine Anzahl Bäume verkaufen; er sagt: bekomme ich für einen Baum a Thlr., so löste ich b Thlr. mehr, als ich brauche; bekomme ich aber für einen Baum c Thlr., so müßte ich noch d Thlr. borgen, um meine Schulden tilgen zu können; wie viel Bäume verkauft er und wie viel Thlr. betragen seine Schulden? Antw. Er verkauft $\frac{b+d}{a-c}$ Bäume und seine Schulden betragen $\frac{ad+bc}{a-c}$ Thlr.

41) Was würde man in 40) erhalten, wenn $a = 10$, $b = 50$, $c = 7$ und $d = 40$ gesetzt würde? A. 30 Bäume und 250 Thlr. Schulden.

42) $\frac{(a+x)n}{m} = x - a$ $\quad x = \frac{a(n+m)}{m-n}$

43) $\frac{2}{5}(x+3) = x - 3$ $\quad x = 7$

Leicht würden sich 42 und 43 in Worte bringen lassen z. B. „Gebe ich a (3) Thlr. weg, so habe ich nur $\frac{n}{m}$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ so viel, als wenn ich a (3) Thlr. bekomme; wie viel habe ich?" oder: „Vor a (3) Jahren war ich $\frac{n}{m}$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ so alt, als ich nach a (3) Jahren sein werde, wie alt bin ich jetzt?" oder: „Ein Lehrer sagt: hätte sich meine Klasse um a (3) Schüler vermehrt, anstatt daß sie sich um a (3) Schüler vermindert hat, so brauchte jeder Schüler nur wöchentlich $\frac{n}{m}$ $(\frac{2}{5})$ Thlr. zu be-

zahlen und ich hätte doch eben so viel Einnahme, als wenn jetzt jeder wöchentlich 1 Thlr. bezahlt; wie viel hatte er vor der Verminderung seiner Klasse Schüler?"

44) $\frac{1}{4}(4 - x) = 0$ $x = 4$

45) $5 + 3x = 2(x + 7) + 1$ $x = 10$

46) $71 - 4(2x - \frac{1}{2}) = 3 - 5x$ $x = 23\frac{1}{3}$

47) $5 - 3(4 - 5x) = x$ $x = \frac{1}{2}$

48) $2x - \frac{2}{7}(3 + x) = 18$ $x = 11$

49) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{3}{4}x + 50$ $x = 600$

50) Der $n$te Theil und der $m$te Theil meines Vermögens ist um a Thlr. größer, als das $p$fache des $q$ten Theiles desselben; wie viel habe ich? A. $\frac{nmqa}{mq+nq-nmp}$ Thlr.

51) $\frac{4y}{3} - y = 16\frac{1}{2} - \frac{3y}{2}$ $y = 9$

52) Welche Zahl giebt zu 50 addirt dasselbe, als mit 11 multiplicirt? A. 5.

53) Von welcher Zahl ist die Hälfte um 7 größer, als das Drittel? A. 42.

54) $\frac{3x}{2} - 2 = \frac{x}{3} + 5$ $x = 6$

55) $\frac{y-2}{3} = 2y - 19$ $y = 11$

56) Hätte ich 5 Thlr. mehr, als die Hälfte von dem, was ich habe, so wäre meine Kasse eben so stark, als wenn ich 9 Thlr. weniger als $\frac{2}{3}$ von meinem Gelde hätte; wie viel habe ich? A. 84 Thlr.

57) Welche Zahl giebt mit $8\frac{2}{3}$ multiplicirt dasselbe, als von 87 abgezogen? A. 9.

58) Die Hälfte meines Vermögens ist $1\frac{1}{4}$ Thlr. mehr, als das Drittheil und das Achtel desselben; wie viel habe ich? A. 30 Thlr.

In welchem Zusammenhange steht 58 mit 50?

59) Welche Zahl ist eben so viel über $14\frac{1}{3}$, als ihr Drittel unter $6\frac{5}{6}$ ist? A. 16.

60) Welche Zahl ist eben so viel über a, als der nte Theil derselben unter b ist? A. $\frac{(a+b)n}{n+1}$

61) Welche Zahl übertrifft ihr Drittel um $2\frac{1}{2}$ mehr, als ihre Hälfte beträgt? A. 15.

62) Jemand sagt: wäre ich $2\frac{1}{5}$ mal so alt, als ich bin, weniger 36 Jahre, so würde ich immer noch 6 Jahre älter sein, als ich bin; wie alt ist er? A. 35 Jahre alt.

63) Welche Zahl übertrifft ihr Neuntel um 6 mehr, als ihre Hälfte und ihr Sechstel beträgt? A. 27.

64) $5x - 3\frac{1}{2}x + 5 = \frac{x-2}{5} + 13 \qquad x = 5\frac{1}{13}$

65) $7(y-2) - \frac{y}{5} - 3\frac{1}{6} = 34 + \frac{37y}{12} - 2(y-3)$
$y = 10$

66) $\frac{ax}{b} - x = cx + d \qquad x = \frac{bd}{a-b-bc}$

67) Denke dir eine Zahl, addire dazu 1, dividire diese Summe durch 3 und addire zu diesem Quotienten 306, so erhältst du die Hälfte der gedachten Zahl; welche Zahl ist es? Antw. 1838.

68) $\left(\frac{x+7}{5} - 1\right)50 - 20 = 10x \qquad x = x$
d. h. jeder Werth für x genügt der Gleichung, die Gleichung ist identisch.

Kleidete man daher 68 in Worte ein z. B.: Denke dir eine Zahl, addire dazu 7, dividire u. s. w., so würde die Auflösung sein, daß jede beliebige Zahl der Bedingung entspräche.

69) Ich denke mir eine Zahl, addire zu ihr 1, dividire diese Summe durch 5, multiciplire nun mit $6\frac{1}{2}$ und subtrahire nun 7, so erhalte ich die gedachte Zahl wieder; welche ist es? A. 19.

70) Denke dir eine Zahl, nimm $4\frac{1}{2}$ [a] davon weg, multiplicire diese Differenz mit 4 [b] addire zu dem Produkte 1 [c] und dividire diese Summe durch 3 [d], so erhältst du dieselbe Zahl, welche du dir gedacht hast; welche Zahl ist es? A. 17 und allgemein $\frac{ab-c}{b-d}$

Ist denn die gefundene Größe $\frac{ab-c}{b-d}$ auch so beschaffen, daß sie den Bedingungen der Aufgabe entspricht, oder, in Zeichen, ist denn

$$\left(\left[\frac{ab-c}{b-d}-a\right]b+c\right):d=\frac{ab-c}{b-d}?$$

A. Es ist $\left(\left[\frac{ab-c}{b-d}-a\right]b+c\right):d$

$$=\left[\left(\frac{ab-c-a(b-d)}{b-d}\right)b+c\right]:d$$

$$=\left(\left(\frac{ab-c-ab+ad}{b-d}\right)b+c\right):d$$

$$=\left(\left(\frac{ad-c}{b-d}\right)b+c\right):d$$

$$=\left(\frac{adb-cb+cb-cd}{b-d}\right):d$$

$$=\frac{adb-cd}{b-d}:d=\frac{ab-c}{b-d}$$

Dergleichen Entwickelungen sind bei den Aufgaben, deren Auflösungen zu allgemeinen Buchstabenausdrücken führen, sehr zu empfehlen, damit man sich von der Richtigkeit der Auflösung überzeuge. Es sind dabei die im 11. Kapitel gelehrten Formänderungen anzuwenden.

71) Welche Zahl giebt mit 4 multiciplirt 7 mehr, als wenn man ihre Hälfte mit $7\frac{1}{2}$ multiplicirt? A. 28.

72) Der dritte Theil von dem, was ich in meinem Beutel habe, ist 9 Thlr. weniger, als $\frac{4}{9}$ von dem, was ich habe; wie viel habe ich? A. 81 Thlr.

73) Welche Zahl muß man durch 5 dividiren, um 17 weniger zu erhalten, als wenn man die um 1 vergrößerte Zahl durch 2 dividirt? A. 55.

74) Gieb mir noch das Drittel von dem, was ich habe, dann will ich dir 5 Thlr. schenken und ich habe immer noch $1\frac{2}{9}$ mal so viel, als ich anfangs hatte; wie viel habe ich? A. 45 Thlr.

75) Gieb mir 15 Thlr., dann habe ich 22 Thlr. weniger, als das Vierfache von dem, was ich habe; wie viel habe ich? A. 12 Thlr. 10 Sgr.

76) Welche Zahl ist es, die zu a addirt, dasselbe giebt, als mit a multiplicirt? A. $\frac{a}{a-1}$

Vergleiche hierzu 23 und 24.

77) $\frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} = 3 - \frac{x}{6}$ $\quad x = 3\frac{2}{3}$.

78) $\frac{a+x}{b} = \frac{c-x}{d} + e$ $\quad x = \frac{bc+bde-ad}{b+d}$

79) $27 - x = 5x$ $\quad x = 4\frac{1}{2}$

80) $a - x = cx$ $\quad x = \frac{a}{c+1}$

81) 27 (a) Thlr. sind unter zwei Personen so zu vertheilen, daß der eine 5 (c) mal so viel hat, als der andere; wie viel bekommt jeder? A. $4\frac{1}{2}$ Thlr. und $22\frac{1}{2}$ Thlr.; oder allgemein $\frac{a}{c+1}$ Thlr. und $a - \frac{a}{c+1} = \frac{ca}{c+1}$ Thlr.

82) A und B haben zusammen 100 Thlr. (also A x und B 100 — x); giebt A dem B die Hälfte von dem Sei=

nigen, so hat B 4 mal so viel als A; wie viel hat jeder? A. A 40 Thlr., B 60 Thlr.

83) Zwei Personen sollen sich in 324 Thlr. so theilen, daß der zehnte Theil dessen, was A bekommt, 11 Thlr. weniger ist, als der vierte Theil dessen, was B bekommt; wie viel bekommt jeder? A. A 200 Thlr., B 124 Thlr.

84) „Gieb mir," sagt A zu B, welcher 3 mal weniger als A hat, „3 Thlr. und ich habe dann 6 mal so viel als du;" wie viel haben beide? A. A hat 21 Thlr., B 7 Thlr.

85) A und B sind zusammen 53 Jahr alt; vor 10 Jahren war A noch einmal so alt, als B; wie alt sind jetzt beide? A. A ist 32, B 21 Jahr alt.

86) 100 Thlr. sollen unter 3 so vertheilt werden, daß jeder folgende immer 5 Thlr. mehr bekommt, als der vorhergehende; wie viel bekommt jeder? A. Der Erste bekommt $28\frac{1}{3}$, der Zweite $33\frac{1}{3}$, der Dritte $38\frac{1}{3}$ Thlr.

87) 322 Thlr. sollen so unter 4 Personen vertheilt werden, daß jeder folgende immer 2 Thlr. mehr, als das Doppelte des vorhergehenden erhält; wie viel erhalten sie? A. 20 Thlr., 42 Thlr., 86 Thlr., 174 Thlr.

88) In einer Stadt liegt Militär, das Viertel davon sind Cavalleristen, das Siebentel Artilleristen, die übrigen, 850 an der Zahl, Infanteristen; wie stark war das Militär? A. 1400 Mann, und zwar 350 Cavalleristen, 200 Artilleristen und 850 Infanteristen.

89) In 83 Thlr. sollen sich 2 Männer so theilen, daß der Eine 1 Thlr. weniger, als das Doppelte vom Anderen hat; wie viel erhielt jeder? A. Der Eine erhielt 28 Thlr., der Andere 55 Thlr.

90) A sagte zu B: Ich habe 70 Thlr. mehr, als du; hier hast du 20 Thlr., nun habe ich noch $1\frac{1}{2}$ mal so viel, als du; wie viel hatten anfangs beide? A. A hatte 110 Thlr., B 40 Thlr.

91) A sagt zu B: Du hast $2\frac{1}{2}$ mal so viel, als ich; B zu A: Wenn ich dir $\frac{1}{3}$ von dem Meinigen geben wollte, dann würdest du 2 Thlr. mehr haben, als ich; wie viel hat jeder? A. A hat 12 Thlr., B 30 Thlr.

92) Ein Vater vertheilte unter seine 4 Söhne eine gewisse Summe: der dritte bekam 9 Gr. mehr, als der jüngste, der zweite 12 Gr. mehr, als der dritte, der älteste 18 Gr. mehr, als der zweite. Die ganze Summe betrug 6 Gr. mehr, als 7 mal das, was der jüngste erhielt. Wie viel erhielt jeder? A. Der jüngste Sohn erhielt 21 Gr., der dritte 30 Gr., der zweite 42 Gr., der älteste 60 Gr.

93) Auf 2 Wagen waren zusammengenommen 76 Ctr. geladen; auf dem einen waren 3 mal so viel Ctr. weniger 4, als auf dem andern; wie viel auf jedem? A. 20 und 56 Ctr.

94) Jemand frägt nach einer Jahreszahl im 19ten Jahrhundert; man antwortet ihm: die durch die beiden letzten Ziffern ausgedruckte Zahl ist 51 mal kleiner, als die Jahreszahl; welche Zahl ist es? A. 1836.

95) Die Zahl 91 soll in 2 solche Theile getheilt werden, daß der größere dividirt durch die Differenz beider Theile zum Quotienten 7 giebt; welches sind die Theile? A. 49 und 42.

96) Welche Zahlen giebt Aufgabe 95, wenn man sie verallgemeinert, statt 91 a und statt 7 b setzt? A. Der größere Theil ist $\frac{ab}{2b-1}$ der kleinere $\frac{a(b-1)}{2b-1}$

97) Ein Vater ist 52, sein Sohn 20 Jahre alt; vor wie viel Jahren war der Vater 5 mal so alt, als sein Sohn? A. Vor 12 Jahren.

98) Wann wird der Vater noch einmal so alt sein, als sein Sohn? A. Nach 12 Jahren.

99) Der Vatrr ist a, der Sohn b Jahre alt, wann wird der Vater n mal so alt sein, als der Sohn? A. In $\frac{a-nb}{n-1}$ Jahren.

In welchem Zusammenhange stehen 97 — 99 unter einander?

100) Mein Vater ist jetzt noch einmal so alt, als ich; vor 13 Jahren war er dreimal so alt, als ich; wie alt sind wir beide? A. Der Vater 52, der Sohn 26 Jahre.

101) $(3x-1) : (2x+1) = 4 : 3$ $x = 7$

102) $x : (3x+2) = 1 : 3\frac{1}{2}$ $x = 4$

103) $(y+1) : (y-1) = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ $y = 5$

104) $(y+a) : (y-a) = b : c$ $y = \frac{a(b+c)}{b-c}$

105) Eine Zahl verhält sich zu der um 3 größern Zahl, wie 4 : 5; welche Zahl ist es? A. 12.

106) A sagt zu B: Obgleich du 20 [n] Thlr mehr hast, als ich, so verhält sich doch die Anzahl der Thaler, die du hast, zu der Anzahl der meinigen nur wie 9 : 7 [q : p]. Wie viel hatte jeder? A. A hat 70, B 90 Thlr.. Allgemein: A $\frac{np}{q-p}$ und B $\frac{nq}{q-p}$ Thlr.

107) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß wenn man 1, dann 5, und dann 13 zu ihr addirt, diese drei Summen eine stetige geometrische Proportion bilden? A. 3.

108) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß, wenn man sie nach der Reihe von 16, 26 und 56 subtrahirt, die drei Differenzen eine stetige geometrische Proportion bilden? A. 11.

109) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß, wenn man sie zu a, b und c addirt oder von diesen Größen subtrahirt, die drei Summen oder Differenzen eine stetige geometrische Proportion bilden? A. $\frac{b^2 - ac}{\pm(a-2b+c)}$, wo das obere Zeichen für die Summe, das untere für die Differenz gilt.

Welche sind nun hier die drei Zahlen, welche die stetige geometrische Proportion bilden? Antw.:

$$a \pm \frac{b^2 - ac}{\pm(a-2b+c)},\ b \pm \frac{b^2 - ac}{\pm(a-2b+c)}\ \text{u. } c \pm \frac{b^2 - ac}{\pm(a-2b+c)}$$

oder

$$a + \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c},\ b + \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c}\ \text{und}\ c + \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c}$$

Um zu prüfen, ob diese Größen eine richtige geometrische stetige Proportion bilden, muß man mit ihnen eine ähnliche Umformung, wie bei 70 vornehmen. Es ist

$$a + \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c} = \frac{a^2 - 2ab + ac + b^2 - ac}{a - 2b + c} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - 2b + c}$$
$$= \frac{(b^{*)} - a)^2}{a - 2b + c}$$

$$b + \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c} = \frac{ab - 2b^2 + bc + b^2 - ac}{a - 2b + c} = \frac{ab - b^2 + bc - ac}{a - 2b + c}$$
$$= \frac{(c - b)(b - a)}{a - 2b + c}$$

$$c + \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c} = \frac{ac - 2bc + c^2 + b^2 - ac}{a - 2b + c} = \frac{c^2 - 2bc + b^2}{a - 2b + c}$$
$$= \frac{(c - b)^2}{a - 2b + c}$$

Daß nun die drei Größen

$$\frac{(b - a)^2}{a - 2b + c},\quad \frac{(c - b)(b - a)}{a - 2b + c}\quad \text{und}\quad \frac{(c - b)^2}{a - 2b + c}$$

eine stetige geometrische Proportion bilden, erhellet sogleich.

Zusammenstellung der Aufgaben 107—109.

---

*) Es ist angenommen, daß $a < b$ und $b < c$ ist; es hätte auch $a > b$ und $b > c$ angenommen werden können, wonach dann $a - b$ und $b - c$ zu schreiben gewesen wäre; denn $a^2 - 2ab + b^2$ ist sowohl $= (a - b)^2$ als auch $= (b - a)^2$; ebenso $(c^2 - 2bc + b^2) = (b - c)^2$ und $= (c - b)^2$.

110) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß, wenn man von ihr nach der Reihe a, b und c subtrahirt, diese drei Differenzen eine stetige geometrische Proportion bilden? Antw.

$$\frac{b^2 - ac}{2b - a - c}$$

111) $\frac{x + 5}{3} - \frac{x}{4} = \frac{7 - x}{6} + 1\frac{1}{2} \qquad x = 4$

112) $4\frac{1}{2}x - \frac{2x - 17}{3} = \frac{27 - x}{9} + 5x - 10 \qquad x = 12$

113) $3\frac{1}{2}x - \frac{x - 4}{3} + \frac{2 - x}{5} = 2x - \frac{1 - 3x}{10} + 4\frac{5}{6}$
$x = 4\frac{1}{2}$

114) $\frac{ax}{b} - cx + 1 = \frac{x}{ab} - \frac{d}{a} \qquad x = \frac{b(a + d)}{a(bc - a) + 1}$

115) $\frac{5 + x}{2} - 2\frac{1}{3} = 2x - \frac{1 + 3x}{6} + 14 \qquad x = -13\frac{2}{3}$

116) $(a + b)x - (b - c)x + d = \frac{fx - e}{g} + x$

$$x = \frac{e + dg}{f + g(1 - a - c)}$$

117) $\frac{a + x}{a - x} = b \qquad x = \frac{b - 1}{b + 1}a$

118) $\frac{cx - b}{a} + x = b - \frac{c - x}{d} - x$

$$x = \frac{abd + bd - ac}{cd + 2ad - a}$$

119) $\frac{6x - 4}{3} - 2 = \frac{18 - 4x}{3} - \frac{x - 8}{2} + 2 \qquad x = 4$

120) $\frac{a}{x} - \frac{2m}{3} + 4 = \frac{3m}{2} - \frac{b}{x}$ $\qquad x = \frac{6(a+b)}{13m-24}$

121) $\frac{x+a}{b} + x = \frac{c-x}{d} - e$ $\qquad x = \frac{be - ad - bde}{d + bd + b}$

122) $\frac{a(x+b)}{c} + d = \frac{d(c-x)}{a} + b$

$$x = \frac{c^2d + abc - a^2b - acd}{a^2 + cd}$$

123) Ein Bote, welcher täglich 6 Meilen geht, würde 3 Tage früher an einem bestimmten Orte angekommen sein, wenn er täglich $6\frac{1}{2}$ Meile gegangen wäre; wie viel Tage war er unterwegs? A. 39 Tage.

124) Einem Boten, welcher schon vor 4 Tagen abgegangen war und der täglich 6 Meilen zurücklegte, wird ein anderer nachgeschickt, der täglich 8 Meilen zurücklegen will; wie viel Tage wird er brauchen, um den ersten einzuholen? A. 12 Tage.

125) Ein Bote, der täglich $6\frac{1}{2}$ (a) Meilen geht, ist schon 3 [n] Tage fort, als ihm ein anderer Bote, der täglich $7\frac{4}{5}$ (b) Meilen geht, nachgeschickt wird; nach wie viel Tagen wird der zweite den ersten einholen? A. Nach 15 Tagen; allgemein nach $\frac{an}{b-a}$ Tagen.

126) Ein Bote macht in 2 (p) Tagen 15 (a) Meilen; nach 3 (n) Tagen wird ihm ein anderer nachgeschickt, der in 1 (q) Tage 9 (b) Meilen macht; nach wie viel Tagen holt er ihn ein? A. Nach 15, allgemein nach $\frac{aqn}{bp-aq}$ Tagen.

Welche von den Aufgaben 125 und 126 ist die allgemeine, welche die besondere, und wie wird aus der allgemeinen die besondere erhalten?

127) A ist dem B 30 Schritte voraus und macht in derselben Zeit 5 Schritte, in welcher B 4 macht; 8 Schritte von

B messen so viel, als 11 von A; wie viel Schritte wird A noch machen können, ehe B ihn einholt? A. 300 Schritte.

128) B verfolgt den A, als dieser schon 28 Schritte voraus ist, und macht in derselben Zeit 7 Schritte, wo A 6 macht; auch macht er größere Schritte, denn 21 seiner Schritte messen so viel als 25 von den des A; wie viel Schritte wird B machen müssen, ehe er den A einholt? A. 84 Schritte.

129) Um die beiden vorigen Aufgaben allgemein zu lösen, werde angenommen, daß A dem B um n seiner Schritte voraus ist, daß A in derselben Zeit q Schritte macht, in welcher B p macht, und daß r Schritte des A so viel messen als m des B; es fragt sich, wie viel Schritte kann A noch machen, und wie viel muß B machen, ehe er den A einholt? A. A kann noch $\frac{mnq}{rp-mq}$ Schritte machen und B muß $\frac{mnp}{rp-mq}$ Schritte machen, ehe er den A einholt. Ueberhaupt aber würde A $n + \frac{mnq}{rp-mq} = \frac{nrp}{rp-mq}$ Schritte gemacht haben.

130) A ist 40 Schritte gegangen, als B zu gehen anfängt, und macht noch einmal so kleine Schritte, als B, jedoch geht er rascher und zwar in dem Verhältnisse, daß er zu 10 Schritten nur so viel Zeit braucht, als B zu 9 Schritten; wie viel Schritte kann A noch gehen, und wie viel Schritte muß B gehen, ehe er A einholt? A. A kann noch 50, B muß 45 Schritte machen.

131) Ein Weg soll mit Bäumen bepflanzt werden, so daß diese $1\frac{3}{4}^{0}$ auseinander stehen; hätte man 100 Bäume weniger, so könnte man sie nur 2^{0} auseinander stellen; wie viel Bäume hatte man? A. 800.

132) Zwei Städte liegen so viel Meilen auseinander, daß, wenn man $4\frac{1}{6}$ Meile täglich reist, man 3 Tage länger braucht, um von einer zur andern zu kommen, als wenn man 5 Meilen täglich reist; wie weit liegen beide Städte auseinander? A. 75 Meilen.

133) Zwei Städte A und B liegen 113 [a] M. auseinander; ein Regiment marschirt von A nach B und macht täglich $4\frac{1}{2}$ [n] Meilen; ein anderes Regiment marschirt 4 [b] Tage nachher von B nach A und macht täglich 5 [m] Meilen; welchen Tag nach Abmarsch des zweiten Regiments stoßen sie auf einander, und wie viel Meilen hat jedes Regiment gemacht? A. Am 10ten $\left(\frac{a-bn}{m+n}\right)^{ten}$ Tage, und zwar hat das von A nach B marschirende Regiment 63 $\left(\frac{a+bm}{m+n}n\right)$, und das andere 50 $\left(\frac{a-bn}{m+n}m\right)$ Meilen gemacht.

134) A geht von Z aus nach Y und macht täglich 7 (n) Meilen, B 3 (q) Tage nachher von Y aus nach Z, und macht täglich 5 (m) Meilen; als sie auf einander treffen, hat A zwei- (p) mal so viel Meilen gemacht, als B; wie weit liegen Z und Y auseinander? A. 105 oder $\frac{mnq(p+1)}{mp-n}$ Meilen.

135) Aufgabe 134 würde man vielleicht leichter, als auf directem Wege, so auflösen, daß man zuvor berechnete, wie viel Meilen hat A, wie viel Meilen B gemacht? Oder: wie viel Tage ist A, wie viel Tage B unterwegs gewesen? Was würde man für Resultate erhalten? Antw. A ist 10 oder $\frac{mpq}{mp-n}$ Tage unterwegs gewesen und hat 70 oder $\frac{mpqn}{mp-n}$ Meilen gemacht; B ist 7 oder $\frac{np}{pm-n}$ Tage unterwegs gewesen und hat 35 oder $\frac{mqn}{pm-n}$ Meilen gemacht.

136) In einer Gesellschaft verhielt sich die Anzahl der Männer zu der der Weiber wie 3 : 2 [a : b]; als aber 6 [n] Männer mit ihren Frauen fortgegangen waren, verhielt sich die Anzahl der Männer zu der der Weiber wie 7 : 4 [c : d].

Wie viel waren anfangs Männer und Frauen in der Gesellschaft? Antw. 27 oder $\frac{an(c-d)}{bc-ad}$ Männer und 18 oder $\frac{bn(c-d)}{bc-ad}$ Frauen.

137) Als aus einer Gesellschaft 3 (a) Männer mit ihren Frauen fortgingen, so betrug die Hälfte (der b te Theil) der Gesellschaft immer noch 4 (c) Personen mehr, als der 3 te (dte) Theil derselben früher betrug; wie stark war die Gesellschaft früher? Antw. 42 oder $\frac{(bc+2a)d}{d-b}$ Personen stark.

138) Eine Gesellschaft bestand aus 32 Personen; als 4 Männer fortgegangen waren, verhielt sich die Anzahl der Männer zu der der Frauen noch wie 4 : 3; wie viel waren anfänglich Männer und Frauen in der Gesellschaft? Antw. 20 Männer und 12 Frauen.

139) Ein Vater, der 3 mal so alt war, als sein Sohn, sagt zu diesem: wenn wir noch 20 Jahre leben sollten, so wäre ich immer noch 8 Jahre mehr als noch einmal so alt, wie du; wie alt waren beide? A. Der Vater 84, der Sohn 28 Jahre.

140) Zwei Brüder sind zusammen 47 (n) Jahre alt; vor 11 (p) Jahren verhielten sich ihre Lebensjahre wie 2 : 3 [a : b]; wie alt sind beide? A. Der ältere Bruder ist 26 oder $\frac{b(n-p)+ap}{a+b}$, der jüngere 21 oder $\frac{a(n-p)+bp}{a+b}$ Jahre alt.

141) Wie alt sind beide Brüder vor 11 (p) Jahren gewesen? A. Der ältere 15 oder $\frac{b(n-2p)}{a+b}$, der jüngere 10 oder $\frac{a(n-2p)}{a+b}$ Jahre.

142) Von welcher Zahl ist das Quadrat um a [17] kleiner, als das Quadrat der nächstfolgenden Zahl? A. Von $\frac{a-1}{2}$ oder 8.

143) Von welcher Zahl ist das Quadrat um a kleiner, als das Quadrat der um b größeren Zahl? A. Von $\frac{a-b^2}{2b}$.

144) 17 Personen, Männer und Frauen, bezahlten zusammen in einem Gasthofe 2 Thlr. 18 Sgr.; wenn nun jeder Mann 5, jede Frau 4 Sgr. bezahlte; wie viel waren es Männer und wie viel Frauen? A. Es waren 10 Männer und 7 Frauen.

145) Wenn es in 144 hieße, daß jeder Mann n Thlr., jede Frau m Thlr. habe zu bezahlen gehabt, daß aber a Personen b Thlr. hätten bezahlen müssen; wie viel wären es dann Frauen, wie viel Männer gewesen? Antw. Es wären dann $\frac{b-am}{n-m}$ Männer und $\frac{an-b}{n-m}$ Frauen gewesen.

146) Als der Scheffel Korn a [$1\frac{3}{4}$] Thlr. galt, kaufte Jemand für dasselbe Geld n [50] Scheffel weniger, als zu der Zeit, wo er b [$1\frac{2}{3}$] Thlr. galt. Wie viel Scheffel kaufte er das erstemal, wie viel das zweitemal, und wie viel betrug jedesmal sein Kapital? A. Das erstemal kaufte er $\frac{bn}{a-b}$ [1000] Scheffel, das zweitemal $\frac{an}{a-b}$ [1050] Scheffel, jedesmal für $\frac{abn}{a-b}$ [1750] Thlr.

147) Ich habe a [56] Stücken Geld, theils $\frac{1}{6}$ Thaler-Stücke, theils $\frac{1}{4}$ Thaler-Stücke, welche zusammen einen Werth von b [$11\frac{1}{2}$] Thlrn. ausmachen; wie viel von jeder Münzsorte? A. 3(a—4b),[30] $\frac{1}{6}$ Thaler-, 2(6b—a), [26] $\frac{1}{4}$ Thaler-Stücke.

148) Als das Pfd. Kaffé a ($1\frac{1}{2}$) Sgr. weniger kostete, kaufte Jemand für dasselbe Geld b [12] Pfd., für welches er jetzt nur c [10] Pfd. bekommt. Wie viel kostete also jetzt und früher das Pfd. und für wie viel kaufte er jedesmal? A. Früher

kostete das Pfd. $\frac{ac}{b-c}$ [$7\frac{1}{2}$], jetzt $\frac{ab}{b-c}$ [9] Sgr.; er kaufte jedesmal für $\frac{abc}{b-c}$ [90] Sgr.

149) Wenn Jemand täglich n [4] Thlr. ausgiebt, reicht er p [10] Tage länger, als wenn er täglich m [$6\frac{2}{3}$] Thlr. ausgiebt; wie groß ist sein Vermögen? A. $\frac{mnp}{m-n}$ [100] Thlr.

150) Der Anführer eines Bataillons wird gefragt, wie stark das Bataillon sei; er antwortet: wenn man unsere Anzahl verdoppelt und dann 145 wegnimmt, so sind wir so viel über 1000, als wir jetzt unter 1000 sind; wie viel Mann hatte das Bataillon? A. 715.

151) Jemand sagt zu dem Führer eines Haufens: ist Eure Anzahl nicht a [100]? Nein, antwortet jener; aber wenn du mit dem, was uns an a [100] fehlt, in unsere um b [2] verminderte Anzahl dividirst, so erhältst du c [13]; wie viel sind wir demnach? A. $\frac{ac+b}{c+1}$ oder 93.

152) Jemand wird gefragt, ob er a [59] Thlr. in der Tasche habe; er antwortet: wenn man mir noch $\frac{1}{q}$ [$\frac{1}{3}$] so viel als ich habe, gäbe, so würde ich gerade so viel über a [59] Thlr. haben, als ich unter a [59] Thlr. habe, wenn ich jetzt noch b [22] Thlr. weggebe. Wie viel hat er demnach? A. $\frac{(2a+b)q}{2q+1}$ oder 60 Thlr.

153) Auf einem Dampfschiffe waren auf dem zweiten Platze 4 Personen mehr, als auf dem ersten; auf dem ersten bezahlte die Person $5\frac{3}{4}$ Thlr., auf dem zweiten $4\frac{1}{2}$ Thlr. Es betrug nun die Einnahme auf dem zweiten Platze 3 Thlr. mehr, als auf dem ersten. Wie viel Personen waren auf dem ersten Platze? A. 12 Personen.

154) Ein Vater hinterläßt 3 Söhne und bestimmt, daß jeder jüngere 500 Thlr. mehr als noch einmal so viel erhalten soll, als der nächst ältere; es findet sich nun, daß der mittelste 1500 Thlr. weniger als halb so viel bekommt, als die beiden andern zusammen bekommen; wie viel bekamen die drei Söhne? A. 2500, 5500, 11500 Thlr.

155) Verkauft A ein Pfd. seiner Waare mit n [$3\frac{1}{3}$] Thlr., so verliert er an seinem Vorrathe m [6] Thlr.; verkauft er das Pfd. mit p [$3\frac{5}{6}$] Thlr., so gewinnt er q [$6\frac{2}{3}$] Thlr. Wie stark war sein Vorrath und was kostete er ihm? A. Er hatte $\frac{m+q}{p-n}$ [20] Pfd. Vorrath und dieser kostete ihm $\frac{qn+mp}{p-n}$ [70] Thlr.

156) Wer wöchentlich n [20] Thlr. ausgäbe, würde mit einem bestimmten Kapitale q [3] Wochen länger reichen, als wenn er wöchentlich m [26] Thlr. ausgäbe; wie lange reicht er im ersten Falle? A. $\frac{qm}{m-n}$ [13] Wochen.

157) Jemand kauft n [30] Pfd. von 2 Waaren und giebt für das Pfd. der ersten Waare p [5], für das Pfd. der zweiten q [3] Groschen; hätte er für das Pfund der ersten Waare r [$3\frac{1}{2}$], für das der zweiten s [$4\frac{1}{2}$] Groschen bezahlt, so würde er im Ganzen m [6] Groschen mehr ausgegeben haben; wie viel Pfd. kaufte er von jeder Waare? A. Von der ersten Waare kaufte er $\frac{(s-q)n-m}{p-q+s-r}$ [13] Pfd. von der zweiten $\frac{[p-r]n+m}{p-q+s-r}$ [17] Pfd.

158) Als sich aus einer Gesellschaft 6 entfernt hatten, mußte jede der übrigen Personen für die Zehrung 11 Groschen bezahlen, während sonst jeder nur hätte 9 Groschen bezahlen müssen; wie stark war die Gesellschaft anfangs? A. 33 Personen stark.

159) Ich denke mir eine Zahl, subtrahire von ihr 8, dividire den Rest durch 30, subtrahire von diesem Quotienten 11,

multiplire diesen Rest mit 18, und addire dann zu diesem Produkte 19, so habe ich die Hälfte der gedachten Zahl; welche Zahl ist es? A. 1838.

160) A hatte 3 Thlr. mehr, als das Doppelte von dem, was B hatte; hätte A dem B 5 Thlr. gegeben, so hätte sich das Vermögen des A zu dem des B verhalten, wie 7 : 5; wie viel hatte jeder? A. A hatte 33, B 15 Thlr.

161) Als aus einer Gesellschaft a [3] Männer mit ihren Frauen fortgingen, so betrug der b te Theil [die Hälfte] der Gesellschaft immer noch c [4] mehr, als früher der d te Theil [das Drittel] derselben betrug; wie stark war die Gesellschaft anfangs? A. Es waren $\frac{(bc+2a)d}{d-b}$ [42] Personen.

162) Jemand verzehrt in a [6] Tagen b [$12\frac{1}{2}$] Thlr., ein Anderer in c [11] Tagen d [$21\frac{1}{3}$] Thlr.; nach wie viel Tagen wird der erstere n [$4\frac{3}{4}$] Thlr. mehr verzehrt haben, als der letztere? A. Nach $\frac{acn}{bc-ad}$ [33] Tagen.

163) Ein Dampfschiff segelt von A nach B und macht in a [3] Stunden b [7] Meilen; nachdem es n [$2\frac{1}{2}$] Stunden fort ist, segelt ein anderes nach; welches in c [2] Stunden d [5] Meilen macht. Als das erste in B angekommen war, war das zweite noch q [$3\frac{3}{4}$] Meilen von B entfernt; wie viel Meilen liegen daher A und B aus einander? A. $\frac{b(dn-cq)}{ad-bc}$ [35] Meilen.

164) Ein Dampfschiff fährt von A nach B und macht in a [3] Stunden b [$7\frac{1}{3}$] Meile; n Stunden [35 Minuten] später fährt ein anderes Schiff von B aus nach A dem ersteren entgegen und macht in c [5] Stunden d [13] Meilen; wenn man nun weiß, daß beide Schiffe auf der Hälfte des Weges einander begegneten, wie viel Meilen müssen dann A und B von einander entfernt sein? A. $\frac{2bdn}{ad-bc}$ [$47\frac{2}{3}$] Meilen.

165) Jemand giebt a [4500] Thlr. zu p [$3\frac{1}{3}$] Procent auf Zinsen und n [$11\frac{1}{2}$] Jahre nachher b [6400] Thlr. zu p′ [$4\frac{1}{2}$] Procent; wie lange muß er beide Kapitale stehen lassen, damit sie gleichviel Zinsen geben? A. Das erstere $\frac{nbp'}{bp' - ap}$ [24], das letztere $\frac{nap}{bp'-ap}$ [$12\frac{1}{2}$] Jahr.

Wie viel werden in dieser Zeit die Zinsen von jedem Kapitale betragen haben? A. $\frac{napbp'}{100(bp'-ap)}$ [3600] Thlr.

166) Ein Bedienter erhält von seinem Herrn einmal für 8 Monate 9 Friedrichsd'or und 29 Thlr. Courant, ein andermal für 11 Monate 16 Friedrichsd'or und 19 Thlr. 10 Sgr. Courant; wie hoch rechnete ihm sein Herr den Friedrichsd'or an? A. Zu $5\frac{2}{3}$ Thlr.

167) Jemand hat eine Anzahl Thlr.; als er sie in ein Quadrat legen wollte, sah er, daß einmal a [16] übrig blieben, und, wenn er die Seiten des Quadrats um 1 vergrößerte, b [25] ihm fehlten; wie viel Thaler hatte er? A. $\frac{(a+b)^2+2[a-b]+1}{4}$ [416] Thlr.

168) Man weiß, daß ein Körper im Wasser gerade so viel an seinem Gewichte verliert, als das Wasser wiegt, welches er aus der Stelle treibt; wenn er nun in der Luft p [19,34] Lth. im Wasser p′ [13,12] Lth. wiegt, wie groß ist dann sein specifisches Gewicht d. h. die Zahl, welche seine Schwere anzeigt, wenn man die Schwere der einen gleichen Raum einnehmenden Wassermenge gleich 1 setzt? A. $\frac{p}{p-p'}$ [3,1093..].

169) In einer Metallmasse von a Pfd., welche aus Kupfer und Zink besteht, verhält sich die Kupfermenge zur Zinkmenge, wie m : n; wie viel Kupfer muß der Masse zugesetzt

werden, damit die Kupfermenge sich zur Zinkmenge wie p : q verhalte? A. $\frac{a[pn-qm]}{q(m+n)}$ Pfd.

170) Wie viel Zink müßte ich aber wegnehmen von der Masse a, damit dasselbe Verhältniß hergestellt werde? Antw. $\frac{a(pn-qm)}{p(m+n)}$ Pfd.

171) Wenn nun aber die Masse a Pfd. bleiben sollte, und das Verhältniß p : q dadurch herbeigeführt werden sollte, daß man ebensoviel Kupfer dazu thäte, als man Zink wegnähme, wie viel Pfd. müßten dies sein? A. $\frac{a(pn-qm)}{(q+p)(m+n)}$ Pfd.

172) Es bestimmt Jemand in seinem Testamente, daß sein Bedienter von seinem Vermögen 80 Thlr. und dann noch den 7ten Theil des Restes bekommen sollte, sein Kutscher aber von dem, was nun übrig bliebe, 140 Thlr. und dann noch den 7ten Theil des Restes bekommen sollte; nun fand es sich, daß sie beide gleich viel bekamen; wie groß war daher das Vermögen? Wie viel bekam jeder? A. Das Vermögen betrug 2040 Thlr., und jeder bekam 360 Thlr.

173) Wenn es aber in 172 hieße, daß der Bediente den 7ten Theil des Vermögens und dann noch 80 Thlr., der Kutscher aber den 7ten Theil des Restes und dann noch 140 Thlr. bekommen sollte, wie groß hätte dann das Vermögen sein müssen, wenn sie beide hätten gleich viel bekommen sollen, und wie viel würde jeder bekommen haben? A. Das Vermögen hätte müssen 2380 Thlr. betragen, und jeder würde dann 420 Thlr. bekommen haben.

174) Um 172 und 173 ganz allgemein aufzulösen, wollen wir für 80 die Größe a, für 7 die Größe n, für 140 die Größe b setzen; was würde man dann in beiden Aufgaben für Resultate erhalten? A. Nach den Bedingungen der Aufgabe 172 würde das Vermögen $((b-a)n-b)n+a$ Thlr. betragen haben

und jeder hätte $(b-a)(n-1)$ Thlr. erhalten. Nach den Bedingungen der Aufgabe 173 würde das Vermögen $((b-a)n-a)n$ Thlr. betragen haben und jeder hätte $(b-a)n$ Thlr. bekommen.

175) Wenn es in der Aufgabe 172 hieße, daß, nachdem der Bediente und der Kutscher nach den testamentarischen Bestimmungen das ihnen Zukommende erhalten hätten, gerade nichts mehr von dem Vermögen dagewesen wäre; wie groß müßte da das Vermögen gewesen sein und wie viel würde jeder bekommen haben? A. Das Vermögen würde $243\frac{1}{3}$ Thlr. betragen, der Bediente $103\frac{1}{3}$, Der Kutscher 140 Thlr. erhalten haben.

176) Was würde unter den Bedingungen der Aufgabe 175 das Resultat bei der Aufgabe 173 sein? A. Das Vermögen hätte dann $283\frac{8}{9}$ Thlr. betragen, der Bediente $120\frac{5}{9}$, der Kutscher $163\frac{1}{3}$ Thlr. erhalten.

177) Wenn 175 und 176 ebenso verallgemeinert würden, wie es in 174 mit 172 und 173 geschehen ist; was erhielte man dann für Resultate? A. Nach den Bedingungen der Aufgabe 175 würde das Vermögen $\frac{[(a+b)n-(2a+b)]n+a}{(n-1)^2}$ oder $\frac{(a+b)n-a}{n-1}$ Thlr. betragen, der Bediente $\frac{b+a(n-1)}{n-1}$ Thlr., der Kutscher aber b Thlr. erhalten.

Nach den Bedingungen der Aufgabe 176 würde das Vermögen $\frac{[(a+b)n-a]n}{(n-1)^2}$ Thlr. betragen, der Bediente $\frac{[a(n-1)+b]n}{(n-1)^2}$ Thlr., der Kutscher $\frac{nb}{n-1}$ Thlr. erhalten.

178) 5 Personen sollten sich in eine Summe theilen, und zwar sollte der erste ein Drittel des Ganzen weniger 3 Thlr. bekommen, der zweite ein Drittel vom Reste weniger 3 Thlr. und so immer weiter; da fand es sich, daß der fünfte dann 16 Thlr. bekam; wie groß war die Summe, und wie viel blieb noch übrig? A. Die Summe betrug 252 Thlr., und nachdem die 5 Personen das Ihrige genommen hatten, blieben noch 41 Thlr. übrig.

179) Hätte sich aber gefunden, daß, nachdem die 5 Personen das ihnen Bestimmte erhalten, noch 73 Thlr. übrig geblieben wären, wie groß wäre da das Vermögen gewesen? A. 495 Thlr. groß.

180) Wenn aber bei der Theilung, wie sie in 178 vorgeschrieben ist, sich fand, daß der fünfte 195 Thlr. weniger bekam, als der erste; wie groß war da das Vermögen, nnd was blieb für ein Rest übrig? A. Das Vermögen betrug 738 Thlr. und der Rest 105 Thlr.

181) $\sqrt{x+9} = 9 - \sqrt{x}$ $\qquad x = 16$

182) $\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x}$ $\qquad x = 4\frac{21}{25}$

183) $\sqrt{x+7\frac{1}{4}} = 14\frac{1}{2} - \sqrt{x}$ $\qquad x = 49$

184) $\sqrt{x-9} = 9 - \sqrt{x}$ $\qquad x = 25$

185) $\sqrt{x+a} = b - \sqrt{x}$ $\qquad x = \left(\frac{b^2-a}{2b}\right)^2$

186) $\frac{\sqrt{x}}{a} = \frac{b}{\sqrt{x}}$ $\qquad x = ab$

187) $\sqrt{x^2-a} - x = a$ $\qquad x = -\frac{a+1}{2}$

188) $\sqrt[6]{2+x} = \sqrt[12]{x^2+10x+1}$ $\qquad x = \frac{1}{2}$

189) $\sqrt[2r]{a+x^2} = \sqrt[r]{a+x}$ $\qquad x = \frac{1-a}{2}$

190) $a + \sqrt[n]{a-x} = b$ $\qquad a = a - (b-a)^n$

191) $a \cdot b^x = c$ $\qquad x = \frac{\lg c - \lg a}{\lg b}$

192) $a^x = b^x$ $\qquad x = 0$

193) $2^x = 2048$ — $x = 11$

194) $\sqrt[x]{5\frac{104}{125}} = 1\frac{4}{5}$ — $x = 3$

195) $2^x = 3$ — $x = 1{,}58492\ldots$

196) $(\frac{7}{8})^x = \frac{1}{2}$ — $x = 2{,}758086\ldots$

197) $a^x \cdot b^{2x} = c$ — $x = \frac{\lg c}{\lg a + 2 \lg b}$

198) $\frac{3^x}{0{,}5^{3x}} = 576$ — $x = 2$

199) $\frac{3^x}{5^{2x}} = 2$ — $x = -0{,}3269156\ldots$

200) $(\frac{5}{7})^{\frac{3x}{2}} \cdot (\frac{9}{11})^{\frac{5x}{3}} = \frac{13}{17}$ — $x = 0{,}319681\ldots$

Sechszehntes Kapitel.

Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten.

1) $3x - 5y = 15$ — $x = 10\frac{10}{13}$
$2x + y = 25$ — $y = 3\frac{6}{13}$

2) $6\frac{1}{4}x - 17 = y$ — $x = 3\frac{13}{133}$
$6y + 3x = 27 - 1\frac{1}{2}y$ — $y = 2\frac{48}{133}$

3) $ax + \frac{by}{c} = d$ — $x = \frac{ecd - bf}{c(ae - b)}$
$cx + ey = f$ — $y = \frac{af - cd}{ae - b}$

4) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{y - 2x}{2}$ $\qquad x = 5$

$\frac{5x + 3}{7} = y - 2$ $\qquad y = 6$

5) $ax + n = \frac{y}{b}$ $\qquad x = \frac{a(b^2n + m)}{1 - a^2b^2}$

$by + m = \frac{x}{a}$ $\qquad y = \frac{b(n + a^2m)}{1 - a^2b^2}$

6) $2x - 2y = 34$ $\qquad x = 19$

$x + 3y = 25$ $\qquad y = 2$

7) $3\frac{1}{2}x = 5 + 2y$ $\qquad x = 4$

$6x + y = 28\frac{1}{2}$ $\qquad y = 4\frac{1}{2}$

8) $2x - 3y = 3 - x$ $\qquad x = 5$

$\frac{1}{2}x + 4 = \frac{1}{8}y + 6$ $\qquad y = 4$

9) $ax + y = c$ $\qquad x = \frac{bc - d}{ab - 1}$

$x + by = d$ $\qquad y = \frac{ad - c}{ab - 1}$

10) $5\frac{1}{2}y - 2x = 5$ $\qquad x = 3$

$13y + 4x = 38$ $\qquad y = 2$

11) $a + x = by$ $\qquad x = \frac{a(bc + 1)}{b - 1}$

$\frac{x - y}{a} = c$ $\qquad y = \frac{a(c + 1)}{b - 1}$

12) $5x + 6y = 38$ $\qquad x = 4$

$7x - 4y = 16$ $\qquad y = 3$

13) $5x = 7y + 1$ $\qquad x = 3$

$4\frac{1}{2}x - 13 = \frac{1}{4}y$ $\qquad y = 2$

14) $6x + 14\frac{1}{2} = 20y - 41\frac{5}{6}$ $\qquad x = 9\frac{1}{2}$

$39\frac{1}{2} - 2x = \frac{5y}{2} + \frac{2x}{3}$ $\qquad y = 5\frac{2}{3}$

15) $3x - 1\frac{1}{2}y = 9$ $\qquad x = 5$
$\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}y = 8$ $\qquad y = 4$

16) $9\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{3} = 50 - \frac{23y}{15}$ $\qquad x = 4$
$(x + y) : (y - x) = 7 : 3$ $\qquad y = 10$

17) $\frac{3(x-4)}{7} = \frac{y}{2} - \frac{2y - x + 7}{7}$ $\qquad x = 25$
$2x - y = 4(y - x)$ $\qquad y = 30$

18) $ax + by = c$ $\qquad x = \frac{bf - ce}{bd - ae}$
$dx + ey = f$ $\qquad y = \frac{dc - af}{bd - ae}$

19) $ax + y = by + c$ $\qquad x = \frac{(b-1)d + c}{2(b-1) + a}$
$d - x = y + x$ $\qquad y = \frac{ad - 2c}{2(b-1) + a}$

20) $3x + 4y + 5z = 38$ $\qquad x = 2$
$5x + 6y - 3z = 16$ $\qquad y = 3$
$2x - 3y + 6z = 19$ $\qquad z = 4$

21) $x + 2y = 2$ $\qquad x = 1\frac{1}{3}$
$3x - z = 1\frac{1}{2}$ $\qquad y = \frac{1}{4}$
$6y - \frac{1}{2}z = 0$ $\qquad z = 3$

22) $6x + 2y - 5z = 18$ $\qquad x = 3$
$7x - 3y + z = 34$ $\qquad y = -5$
$3x + y - 3z = 10$ $\qquad z = -2$

23) $4x - 3y + 2z = 7$ $\qquad x = 1\frac{29}{43}$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 3$ $\qquad y = 3$
$\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y - \frac{7}{10}z = \frac{1}{2}$ $\qquad z = 4\frac{38}{43}$

24) $\frac{x}{7} - \frac{y}{13} = z - 5\frac{1}{4}$ $\qquad x = 3\frac{979}{1594}$

$\frac{x+2}{66} = \frac{z-y}{11}$ $\qquad y = 4\frac{387}{797}$

$x : z = 2 : 3$ $\qquad z = 5\frac{1343}{3188}$

25) $x + y + z = a$ $\qquad x = \frac{b+c}{2}$

$x + y - z = b$ $\qquad y = \frac{a-c}{2}$

$x - y + z = c$ $\qquad z = \frac{a-b}{2}$

26) $5\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 37\left(\frac{z-4}{6}\right) + 1$ $\qquad x = 8$

$5(z - x) - (y - x) = 9(z - y)$ $\qquad y = 9$

$\frac{10 - x + y}{11} = 1 - \frac{10 - z}{3}$ $\qquad z = 10$

27) $\frac{1}{2}x + 4y - z = 3x - \frac{1}{2}$ $\qquad x = 7$

$x = 2y - z$ $\qquad y = 5$

$\frac{3}{4}(x + y) = 3 + 2z$ $\qquad z = 3$

28) $\frac{x+y}{z} = 14$ $\qquad x = 4$

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}y$ $\qquad y = 10$

$11 - x = y - 3z$ $\qquad z = 1$

29) $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 14$ $\qquad x = 7$

$y + z = 3x - 4$ $\qquad y = 8$

$z - x = \frac{1}{4}y$ $\qquad z = 9$

30) $2(x - 3y) = z - 6\frac{1}{2}$ $\qquad x = 7$

$z : (x + y) = 11 : 19$ $\qquad y = 2\frac{1}{2}$

$\frac{x-z}{3} = y - 2$ $\qquad z = 5\frac{1}{2}$

31) $xy = 21z$ $\qquad x = 9$

$\frac{x + z}{6} = \frac{y - z}{2}$ $\qquad y = 7$

$\frac{y + z}{x} = 1\frac{1}{9}$ $\qquad z = 3$

32) $6\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + z = 75$ $\qquad x = 12$

$2x : (y - z) = 3 : 1$ $\qquad y = 15$

$\frac{x + 2z}{2} = y - 2$ $\qquad z = 7$

33) $7\frac{1}{2}x - 5y + 2z = 48\frac{2}{3}$ $\qquad x = 8$

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 5[z - 1)$ $\qquad y = 3$

$\frac{x}{y} - \frac{z}{2y} = \frac{3}{4y} + 2\frac{1}{9}$ $\qquad z = 1\frac{5}{6}$

34) $\frac{x - y}{11} = \frac{7 - z}{20}$ $\qquad x = 5\frac{1}{2}$

$(x - 2y) : (y - \frac{1}{2}z) = 11 : 3$ $\qquad y = 0$

$\frac{4(x + z)}{5} = y + 2$ $\qquad z = -3$

35) $bx + y + z = a$

$x - cy + z = b$

$x + y - az = b$

$$x = \frac{a^2c + c^2 + c - a + ab + b}{abc + c + a - b + 2}$$

$$y = \frac{a^2 - ab^2 + a - b - bc + c}{abc + c + a - b + 2}$$

$$z = \frac{ac + a - c - bc^2 - b^2 + b}{abc + c + a - b + 2}$$

Man wird auch für x, y, z folgende Werthe finden können, die den obigen gleich und nur der Form nach von ihnen verschieden sind:

$$x = \frac{(a^2 + c)(c + 1) - (a - b)(a + 1)}{(ab + 1)(c + 1) - (b - 1)(a + 1)}$$

$$y = \frac{(ab + 1)(a - b) - (b - 1)(a^2 + c)}{(ab + 1)(c + 1) - (b - 1)(a + 1)}$$

$$z = \frac{(a - c)(c + 1) - (b - 1)(c^2 + b)}{(ab + 1)(c + 1) - (b - 1)(a + 1)}$$

36) $ax + by + cz = m$
$x - y + z = n$
$x + y - z = p$

$$x = \frac{n + p}{2}$$

$$y = \frac{2m - a(n + p) + c(n - p)}{2(b + c)}$$

$$z = \frac{2m - a(n + p) - b(n - p)}{2(b + c)}$$

37) $(y + x + z) : v = 3 : 2$ — $x = 1$
$3x - z = v - y$ — $y = 8$
$\frac{2(y - z)}{5} = 5 - \frac{v + x}{3}$ — $z = 3$
$\frac{5 + x}{2} - \frac{y - z + 1}{3} = \frac{13 - v}{5}$ — $v = 8$

38) $x + v = z - y + 5\frac{5}{6}$ — $x = 4\frac{1}{2}$
$\frac{x - y}{3} = \frac{3}{10}(z - v)$ — $y = 3$
$z + x = y + v + 3\frac{1}{6}$ — $z = 7$
$y + \frac{y - 2x}{2} = \frac{z - 3v}{9} + 1$ — $v = 5\frac{1}{3}$

39) $x + y - \frac{1}{2}z - 4v = 3$ $\qquad x = 4$

$(2x - z) : (y - v) = 4 : 3$ $\qquad y = 6$

$\frac{x + v}{11} = \frac{y - 2z}{4}$ $\qquad z = 2$

$y - x + v = z + 1\frac{1}{2}$ $\qquad v = 1\frac{1}{2}$

40) $x + y = a$ $\qquad x = \frac{a - b + c - d}{2}$

$y + z = b$ $\qquad y = \frac{a + b - c + d}{2}$

$z + v = c$ $\qquad z = \frac{b - a + c - d}{2}$

$v - x = d$ $\qquad v = \frac{a - b + c + d}{2}$

41) $2x + 3z = y - v$ $\qquad x = 3$

$\frac{y - x}{2} = z - v$ $\qquad y = 5$

$\frac{1}{3}x - y = 4(z + v)$ $\qquad z = 0$

$x + v - 1 = \frac{y + z}{5}$ $\qquad v = -1$

42) $x + y + z + v = a$

$y + z + v + w = b$

$z + v + w + x = c$

$v + w + x + y = d$

$w + x + y + z = e$

$x = \frac{1}{3}(a - 3b + c + d + e) = \frac{1}{4}s - b$

$y = \frac{1}{4}(a + b - 3c + d + e) = \frac{1}{4}s - c$

$z = \frac{1}{4}(a + b + c - 3d + e) = \frac{1}{4}s - d$

$v = \frac{1}{4}(a + b + c + d - 3e) = \frac{1}{4}s - e$

$w = \frac{1}{4}(-3a + b + c + d + e) = \frac{1}{4}s - a$, wo bei den zweiten Ausdrücken $s = a + b + c + d + e$ ist.

42) Die Zahl 44 soll in zwei Theile zerlegt werden, die sich zu einander verhalten, wie 6 : 5; wie heißen die beiden Theile? A. 24 und 20.

43) A hat 7 Thlr. mehr, als das Doppelte von dem, was B hat; gäbe aber A dem B den 7ten Theil seines Vermögens, so hätte A noch 26 Thlr. weniger, als das Doppelte von dem Vermögen des B; wie viel hatte A und B? A. A hat 77 Thlr., B 35 Thlr.

Zur Auflösung der Aufgaben 42 und 43 ist die Einführung von zwei unbekannten Größen nicht nöthig; man würde sie auch als Aufgaben behandeln können, die nur zu einer Gleichung mit einer unbekannten Größe führen, indem das Verhältniß der beiden zu findenden Größen so einfach ist, daß man die eine durch die andere sogleich ausdrücken und aus dieser und der andern nach den Bestimmungen der Aufgabe die Gleichung bilden kann. Ebenso wie 42 und 43 könnten auch viele Aufgaben aus dem vorigen Kapitel als Gleichungen mit zwei unbekannten Größen behandelt werden, so namentlich die Aufgaben 82 — 85, 89 — 91, 93 — 96, 100, 106, 130, 136, 138 — 141, 144 — 148, 157, 160. Es sollen daher im Folgenden solche Aufgaben gegeben werden, bei denen die Einführung von mehr als einer unbekannten Größe wenigstens für den weniger Geübten meist vortheilhafter ist, als das Vorausbestimmen der einen unbekannten Größe aus der andern; bei den meisten Aufgaben dürfte letzteres überhaupt sehr schwierig sein.

44) Wenn du mir, sagt A zu B, 7 Thlr. schenkst, dann habe ich 37 Thlr. mehr, als du; wenn ich dir aber das Drittel von dem Meinigen gebe, dann hast du 27 Thlr. mehr, als ich; wie viel hatte jeder? A. A hat 75 Thlr., B 52 Thlr.

45) 14 Pfd. Zucker kosten so viel, als 11 Pfd. Kaffé; 10 Pfd. Zucker und 2 Pfd. Kaffé aber kosten zusammen 2 Thlr. 21 gGr.; wie viel kostet das Pfd. von jedem? A. Das Pfd. Kaffé 7 gGr., das Pfd. Zucker $5\frac{1}{2}$ gGr.

46) 5 Pfd. Kupfer und 3 Pfd. Eisen kosten zusammen 46 Gr., 2 Pfd. Kupfer und 7 Pfd. Eisen 30 Gr.; wie viel kostet das Pfd. von jedem Metalle? A. Das Pfd. Kupfer 8 Gr., das Pfd. Eisen 2 Gr.

47) 4 Schock Aepfel und 15 Schock Birnen kosten zusammen 1 Thlr. 29 Sgr.; 10 Schock Aepfel und 9 Schock Birnen aber 2 Thlr. 2 Sgr.; wie theuer ist das Schock Aepfel und das Schock Birnen? A. Das Schock Aepfel kostet $3\frac{1}{2}$ Sgr., das Schock Birnen 3 Sgr.

48) 3 Pfd. Rosinen und 4 Pfd. Mandeln kosten 1 Thlr. 23 Sgr.; 4 Pfd. Rosinen und 3 Pfd. Mandeln kosten 1 Sgr. weniger, wie viel kostet das Pfd. von jedem? A. Das Pfd. Rosinen kostet 7 Sgr., das Pfd. Mandeln 8 Sgr.

49) 15 Birnen kosten 8 Spf., 20 Aepfel 9 Spf.; nun kauft Jemand für 17 Sgr. 11 Spf. 450 Stück, Birnen und Aepfel zusammen; wie viel waren darunter Birnen, wie viel Aepfel? A. 300 Aepfel und 150 Birnen.

50) $7\frac{1}{2}$ Pfd. Zucker und $6\frac{2}{3}$ Pfd. Kaffé kosten 3 Thlr. 10 Sgr., 9 Pfd. Zucker und 11 Pfd. Kaffé 4 Thlr. 27 Sgr.; was kostet 1 Pfd. Zucker, was ein Pfd. Kaffé? A. Das Pfd. Zucker $5\frac{1}{3}$ Sgr., das Pfd. Kaffé 9 Sgr.

51) Jemand wechselte einmal 12 Friedrichsd'or und bekam dafür 8 Dukaten und $42\frac{2}{3}$ Thlr. Cour.; ein andermal, als der Cours derselbe war, bekam er für 15 Friedrichsd'or 20 Dukaten und $21\frac{2}{3}$ Thlr. Cour.; wie hoch stand der Friedrichsd'or und der Dukaten? A. Der Friedr. $5\frac{2}{3}$ Thlr., der Duk. $3\frac{1}{6}$ Thlr.

52) Zwei Zahlen verhalten sich wie 7 : 9 [a : b], zählt man aber zu jeder 3 [n] hinzu, so verhalten sie sich wie 4 : 5 [c : d]; welche Zahlen sind es? A. 21 und 27 oder $\frac{a(d-c)n}{bc-ad}$ und $\frac{b(d-c)n}{bc-ad}$

53) Ein Bruch bedeutet soviel als $\frac{4}{5}$ $\left[\frac{a}{b}\right]$, vergrößert man aber Zähler und Nenner um 8 [n], so ist er gleich $\frac{c}{d}$ [$\frac{14}{17}$]; welcher Bruch ist es? A. $\frac{48}{60}$ oder allgemein $\frac{an(d-c):(bc-ad)}{bn(d-c):(bc-ad)}$

54) Die Summe zweier Zahlen ist a, ihr Quotient auch a; welche Zahlen sind es? A. $\frac{a^2}{a+1}$ und $\frac{a}{a+1}$

55) Zwei Personen wußten nicht bestimmt, wie alt sie wären; nur so viel erinnerte sich A, daß er vor 7 Jahren $1\frac{1}{4}$ mal so alt gewesen war, als B; B aber behauptete, er wäre vor 31 Jahren halb so alt gewesen, als A. Wenn nun beide Recht hatten, wie alt war da jeder? A. A war 47, B 39 Jahre alt.

56) A sagt zu B: gieb mir 13 Thlr., und ich habe 10 Thlr. mehr, als du; B sagt zu A: gieb mir 5 Thlr. und ich habe noch einmal so viel, als du; wie viel hatte jeder? A. A 31 Thlr., B 47 Thlr.

57) Der dritte Theil meines Vermögens, sagt A zu B, ist 2 Thlr. mehr werth, als der vierte Theil des deinigen; wenn du mir aber 7 Thlr. giebst, dann habe ich 2 Thlr. mehr, als du; wie viel hatten beide? A. A 60 Thlr., B 72 Thlr.

58) Eine Gesellschaft, Männer und Frauen, bezahlte in einem Gasthause 9 Thlr. 10 Sgr., jeder Mann nämlich 14, jede Frau 10 Sgr.; hätte jeder Mann 13, jede Frau aber 11 Sgr. verzehrt, so hätte die Rechnung 9 Thlr. 2 Sgr. betragen; aus wie viel Männern und Frauen bestand die Gesellschaft? A. Aus 15 Männern und 7 Frauen.

59) Die Summe zweier Zahlen ist gleich dem fünffachen ihrer Differenz; zieht man aber von der größeren 8 ab, so erhält man die Hälfte der kleinern; welche Zahlen sind es? A. 8 und 12.

60) Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 5 [a : b]; addirt man aber zur ersten 14 [n] und subtrahirt von der zweiten 28 [m], so verhalten sie sich, wie 5 : 2 [b : a]; welche Zahlen sind es? A. 16 und 40, $\frac{a(an+bm)}{b^2-a^2}$ und $\frac{b(an+bm)}{b^2-a^2}$.

61) Zwei Personen haben zusammen genommen 8 mal mehr, als die Differenz ihres beiderseitigen Vermögens beträgt; giebt aber die, welche weniger hat, der anderen 55 Thlr. so verhalten sich ihre Vermögensumstände wie 3 : 5; wie groß war das Vermögen dieser beiden Personen? A. Die eine hatte 385 Thlr., die andere 495 Thlr.

62) In einem Wirthshause bezahlte eine Gesellschaft, welche aus Männern und Frauen bestand, 11 Thlr. 8 Sgr., nämlich jeder Mann 21, jede Frau 16 Sgr.; als ein andermal 3 Männer mit ihren Frauen nicht bei der Gesellschaft waren, so hatte man 6 Thlr. 20 Sgr. zu bezahlen; jedoch hatte diesesmal jeder Mann nur 20, jede Frau nur 12 Sgr. zu bezahlen; wie viel Männer und Frauen zählte die Gesellschaft das erstemal? A. 10 Männer und 8 Frauen.

63) 12 Louisd'or und 14 Dukaten sind gleich 111 Thlr. Cour.; 7 Louisd'or und 5 Dukaten gleich 54 Thlr. 21 Sgr. 8 Pf.; wie viel gilt der Louisd'or und der Dukaten? A. Der Louisd'or 5 Thlr. 16 Sgr. 8 Spf., der Dukaten 3 Thlr. 5 Sgr.

64) Legt man der kleinern von zwei Zahlen 16, der größeren 28 zu, so verhalten sie sich wie 5 : 8; macht man es umgekehrt, so sind sie einander gleich; welche Zahlen sind es? A. 24 und 36.

65) Was ist das für ein Fürst, der nach Christi Geburt lebte und dessen Sterbejahr vermindert um die zehnfache Dauer seiner Regierung gleich der Anzahl der Jahre ist, um welche das Jahr seines Regierungsantrittes das um 400 verminderte Sterbejahr übertrifft, sein Sterbejahr ist aber $17\frac{1}{2}\frac{6}{3}$ mal größer, als die Dauer seiner Regierung? A. Man erhält als Jahr des

Regierungsantrittes 768, als Sterbejahr 814; also Karl der Große.

66) Jemand will ein Instrument gegen ein neues vertauschen; wäre jedes 5 Thlr. mehr werth gewesen, so hätte das alte nur $\frac{1}{5}$ so viel, als das neue gegolten; wäre aber das alte 5, das neue 15 Thlr. weniger werth gewesen, so hätte das alte nur $\frac{1}{7}$ so viel als das neue gegolten; wie viel kostete jedes? A. Das alte 20, das neue 120 Thlr.

67) Ein Faß Wein enthält 30 Quart, ein anderes, von dem das Quart 2 Sgr. weniger kostet, 25 Quart; nähme man aber aus jedem 5 Quart heraus und schüttete diese in das andere, so wäre das erste Faß noch 4 Thlr. 20 Sgr. mehr werth, als das zweite; wie viel kostete demnach das Quart von beiden Sorten, als sie noch unvermischt waren? A. Aus dem ersten Fasse 22 Sgr., aus dem zweiten 20 Sgr.

68) Bei welchem Fürsten [p. chr. n.] beträgt das Jahr des Regierungsantrittes $37\frac{19}{23}$ mal so viel, als die Regierungszeit; sein Sterbejahr aber ist um 866 größer, als das Zwanzigfache seiner Regierungszeit? A. Bei Friedrich dem Großen von 1740 — 1786.

69) Das specifische Gewicht eines Thalers sei 10,2, das specifische Gewicht des Silbers 10,5, des Kupfers 9; wie viel procent enthält der Thaler Silber und Kupfer? A. Dem Gewichte nach enthält der Thaler 82,35294... pr. Silber und 17,64705... pr. Kupfer; dem Raume nach aber 80 pr. Silber und 20 pr. Kupfer.

70) Ein silberner Löffel wiege 5 Loth und habe ein specifisches Gewicht von 10; wie viel enthält er Silber und Kupfer, wenn das specifische Gewicht dieser Metalle wie in 69 angenommen wird? A. $3\frac{1}{2}$ Lth. Silber und $1\frac{1}{2}$ Lth. Kupfer.

71) Wie viel pr. Silber und Kupfer würde eine Silbermünze enthalten, wenn ihr specifisches Gewicht 10,11 wäre? A. Dem Gewichte nach 76,8545994 ... pr. Silber und

23,1454005.. pr. Kupfer; dem Volumen nach 74 pr. Silber und 26 pr. Kupfer.

72) Ein Körper enthalte a Raumtheile und habe ein specifisches Gewicht von P; er bestehe aus dem Körper A, dessen specifisches Gewicht p, und dem Körper B, dessen specifisches Gewicht p′ sei; es fragt sich, wie viel Raumtheile enthält er vom Körper A und wie viele vom Körper B? A. Vom Körper A enthält er $\frac{a(P-p')}{p-p'}$, vom Körper B $\frac{a(p-P)}{p-p'}$.

73) Wenn aber in 72) a die Gewichtstheile des Körpers bedeuteten, sonst aber die Bezeichnung dieselbe bliebe; wie viel Gewichtstheile enthält da der Körper vom Körper A und B? A. Von A $\frac{a(P-p')p}{(p-p')P}$, von B aber $\frac{a(p-P)p'}{(p-p')P}$.

Vergleichung von 72 und 73 unter sich und mit 69—71.

74) Eine Metallmasse enthält 2 Ctr. mehr Eisen, als Kupfer; das specifische Gewicht der ganzen Masse ist 8, das des Eisens 7,5, das des Kupfers 9; wie viel enthält die Masse an Eisen, wie viel an Kupfer? A. 5 Ctr. Eisen und 3 Ctr. Kupfer.

75) Eine Metallegirung enthält auf 3 Lth. Silber 4 Lth. Kupfer, eine andere auf 2 Lth. Silber 5 Lth. Kupfer; man will aus obigen beiden eine dritte Legirung bilden, welche 1 Lth. Silber und 2 Lth. Kupfer enthält; wie viel muß man zu diesem Zwecke aus jeder der beiden gegebenen Legirungen nehmen? A. Von der ersten 1 Loth, von der zweiten 2 Lth.

76) Ein Metallstück besteht aus 11 Lth. Gold und 13 Lth. Kupfer, ein anderes aus 7 Lth. Gold und 9 Lth. Kupfer; man will aus beiden eine Composition machen, welche $3\frac{1}{2}$ Lth. Gold und $4\frac{1}{4}$ Lth. Kupfer enthält; wie viel muß man von jedem der beiden Metallstücke nehmen? A. Vom ersten $5\frac{1}{4}$ Lth., vom zweiten $2\frac{1}{2}$ Lth.

77) Bestehe allgemein ein Metallstück aus a Lth. Gold und b Lth. Silber, ein anderes aus c Lth. Gold und d Lth.

Silber; man wünscht aus beiden ein drittes Stück zusammenzusetzen, welches e Lth. Gold und f Loth Silber enthalte; wie viel muß man von den beiden Stücken nehmen? A. Von dem ersten $\frac{(de-cf)(a+b)}{ad-bc}$, vom zweiten $\frac{(af-be)(c+d)}{ad-bc}$ Loth.

78) Hätte man aber ein Metallstück, das aus 2 Loth Gold und 3 Loth Silber, ein anderes, das aus 3 Loth Gold und 5 Loth Silber bestände, und man nähme von dem ersteren 2 Loth, von dem zweiten 7 Loth, wie viel Loth Gold und Silber würde dann das aus diesen beiden zusammengesetzte Stück enthalten? A. $3\frac{17}{40}$ Loth Gold und $5\frac{23}{40}$ Loth Silber.

79) Um 78 allgemein aufzulösen, werde angenommen, daß das eine Metallstück aus a Loth Gold und b Loth Silber, das andere aus c Loth Gold und d Loth Silber bestehe; wenn man nun von dem erstern m, von dem zweiten n Loth nähme, wie viel Gold und Silber würde dann die Zusammensetzung aus beiden enthalten? A. $\frac{ma}{a+b} + \frac{nc}{c+b}$ Loth Gold, und $\frac{mb}{a+b} + \frac{nd}{c+d}$ Lth. Silber.

80) Man hat 2 Sorten Wein; nähme man von der ersteren 3 Quart, von der zweiten 5 Quart, so würde ein Quart der Mischung $18\frac{1}{2}$ Silbergroschen werth sein; nähme man aber von der erstern 2 Quart, von der zweiten 3 Quart, so würde das Quart dieser Mischung $18\frac{2}{5}$ Sgr. werth sein; wie viel kosten daher die beiden Sorten? A. Die erstere 16 Sgr., die zweite 20 Sgr.

81) A reist von Stettin über Berlin nach Cöln, täglich 5 Meilen zurücklegend, und trifft 30 Meilen hinter Berlin seinen Freund B, der denselben Tag von Cöln abgereist war, als A von Stettin abreiste, und der täglich 6 Meilen zurücklegt. Beide Freunde setzen fest, daß sie bei der Rückreise wieder an ein und demselben Tage abreisen und auch eben so schnell, als auf der

Hinreise, reisen wollen; da trifft A seinen Freund B 40 Meilen vor Berlin. Wie weit würden, wenn obige Angabe richtig wäre, die Städte auseinander liegen? A. Stettin von Berlin 20 Meilen, Berlin von Cöln 90 Meilen.

82) Nachdem A 6 Thlr. von B gewonnen, hatte er nur $\frac{1}{4}$ so viel, als dem B übrig blieb; hätte aber B 6 Thlr. von A gewonnen, so hätte er 6 mal so viel gehabt, als dem A übrig blieb; wie viel hatte jeder vor dem Spiele? A. A 22 Thlr., B 90 Thlr.

83) Eine Zahl wird mit zwei Ziffern geschrieben, kehrt man die Zahl um, so ist sie 27 weniger, als früher; ihre Ziffernsumme beträgt 13. Welche Zahl ist es? A. 85.

84) Eine Zahl wird mit 2 Ziffern geschrieben, addirt man zur ersten rechts 2, zur zweiten 3, so gilt die Zahl 36 mehr, als wenn man sie, so verändert, umkehren wollte; die Zahl selbst aber, von der die Rede ist, gilt auch 36 mehr, als ihre Ziffernsumme; welche Zahl ist es? A. 41.

85) Der Unterschied der Quadrate zweier Zahlen ist 115, die Summe der Zahlen selbst 23; welche Zahlen sind es? A. 14 und 9.

86) Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen übertrifft die Differenz der Zahlen selbst um a, die Summe der Zahlen aber beträgt b; welche Zahlen sind es? A. $\frac{b^2 + a - b}{2(b - 1)}$ und $\frac{b^2 - a - b}{2(b - 1)}$

87) Ein Knabe verliert von den Eiern, von denen er 5 mit 2 Sgr. verkaufen soll, einige; um dennoch gerade so viel Geld zu lösen, als wenn er keine verloren, verkauft er nun immer so viel, als er verloren, mit $4\frac{2}{3}$ Sgr. Er verkauft aber nur die Hälfte von denen, die er nicht verloren, und muß nun, um seiner Herrschaft die unverkauften Eier nur zu dem ersten Preise berechnen zu können, 2 Sgr. zulegen; wie viel Eier hatte er,

und wie viel hatte er verloren? A. Er hatte 70 Eier und 10 Eier hatte er davon verloren.

88) Als Jemand zu einem gewissen Zinsfuße 4000 Thlr. borgte, zu einem andern aber 9500 Thlr. verborgte, gewann er an jährlichen Zinsen $246\frac{2}{3}$ Thlr.; hätte er aber zu demselben Zinsfuße, zu welchem er das erstemal borgte, ein anderesmal 8400 Thlr. geborgt und zu demselben Zinsfuße, wie das erstemal, 1500 Thlr. verborgt, so hätte er an jährlichen Zinsen 220 Thlr. verloren; zu welchem Zinsfuße borgte er, zu welchem verborgte er? A. Er borgte zu $3\frac{1}{3}$ pr. und verborgte zu 4 pr.

89) Um 88 allgemein zu lösen, werde angenommen, daß Jemand zu einem gewissen Zinsfuße a Thlr. borgte, zu einem andern b Thlr. verborgte und dabei an jährlichen Zinsen n Thlr. gewann; ferner, daß er ein andermal zu demselben Zinsfuße, als das erstemal, c Thlr. borgte und d Thlr. verborgte und dabei an jährlichen Zinsen m Thlr. verlor; es fragt sich, welches der Zinsfuß war, zu dem er borgte, und welches der, zu dem er verborgte. A. Er borgte zum Zinsfuße $\frac{100\,(nd + mb)}{bc - ad}$ und verborgte zum Zinsfuße $\frac{100\,(nc + ma)}{bc - ad}$.

90) Welcher Fürst im 17ten Jahrhunderte regierte 17 Jahre weniger, als der Unterschied der Jahreszahl seines Regierungsantrittes und des Anfangsjahres dieses Jahrhunderts beträgt und zugleich 3 Jahre länger als die Quersumme der Jahreszahl seines Regierungsantrittes beträgt; die letzte Ziffer desselben ist aber nur um 3 kleiner, als die andern Ziffern zusammen? A. Ferdinand III., von 1637 — 1657.

91) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß, wenn man a zu ihnen addirt, sie sich verhalten wie m : n, wenn man aber b von ihnen subtrahirt, sie sich verhalten, wie o : p? Antw.
$\frac{oa\,(m - n) - mb\,(p - o)}{on - pm}$ und $\frac{pa\,(m - n) - nb\,(p - o)}{on - pm}$

92) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß, wenn man sie zu a addirt, sie sich verhalten, wie m : n, wenn man aber sie von b subtrahirt, wie o : p? A. Dieselben, welche der Aufgabe 91 entsprechen.

93) Wenn man zu der einen von zwei Zahlen a, zur andern b addirt, so verhalten sie sich wie m : n, wenn man aber von der der erstern a subtrahirt und von der zweiten b, so verhalten sie sich wie o : p; welche Zahlen sind es? A. $\frac{o(bm-na)-m(ap-ob)}{no-mp}$ und $\frac{p(bm-na)-n(ap-ob)}{no-mp}$

94) A sagt: wenn mir B die Hälfte von seinem Gelde und C das Drittel von seinem Gelde giebt, so habe ich 42 Thlr. B sagt; wenn mir A 8 Thlr. und C den sechsten Theil seines Geldes giebt, so habe ich so viel, als A und C dann zusammen haben; C sagt: mein Vermögen verhält sich jetzt zu dem des A und B zusammen, wie 15 : 22. Wie viel hat jeder? A 20 Thlr., B 24 Thlr., C 30 Thlr.

95) Drei Zahlen betragen zusammen 13; die erste weniger der zweiten ist um 4 kleiner, als die dritte; addirt man aber zur zur zweiten 2 und multiplicirt diese Summe mit 2, so erhält man soviel, als die erste und dritte zusammen betragen; welche Zahlen sind es? A. $4\frac{1}{2}$, 3, $5\frac{1}{2}$.

96) A hat so viel als B und C zusammen; auch hat A 4 mal so viel, als der Unterschied des Vermögens des B und C beträgt; gäbe aber A dem B so viel, als er schon hat, so würde B 20 Thaler mehr, als A und C zusammen besitzen; wie viel hat jeder? A. A 40 Thlr., B 25 Thlr.; C 15 Thlr.

97) Gäbe A dem B und C halb so viel, als jeder dieser beiden schon hat, so hätten diese zusammen 16 Thlr. mehr, als A; gäbe er aber dem B $\frac{1}{5}$ von dem, was B schon hat, ließe sich aber von C 13 Thlr. geben, so hätte er dreimal so viel, als B und C zusammen; übrigens verhält sich jetzt das Vermögen

des A zu dem des B und C zusammen, wie 10 : 7; wie viel hat jeder? A 40 Thlr., B 10 Thlr., C 18 Thlr.

98) Drei Brüder haben zusammen 1228 Thlr.; die Hälfte des Vermögens des ältesten und jüngsten ist um 2 Thlr. größer, als das Vermögen des mittelsten; hätte aber der älteste noch die Hälfte und der mittelste noch das Drittel von dem, was sie haben, so hätten sie zusammen 26 Thlr. weniger, als das Dreifache von dem Vermögen des jüngsten; wie viel hatte jeder? A. Der älteste 420 Thlr., der mittelste 408 Thlr., der jüngste 400 Thlr.

99) Die Summe dreier Zahlen beträgt 14; die Differenz der beiden ersten ist gleich der Hälfte der dritten, und die Summe der beiden ersten ist $1\frac{1}{3}$ mal größer, als die dritte; welche Zahlen sind es? A. $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ und 6.

100) Jemand reist 100 Meilen, theils mit Extrapost, auf der ihm die Meile im Durchschnitt 15 Sgr. kostet, theils mit Schnellpost, auf der er für die Meile 9 Sgr., theils mit Fahrpost, auf der er für die Meile 6 Sgr. bezahlt. Er bezahlte für Extrapost $1\frac{1}{2}$ Thlr. weniger, als für Schnell- und Fahrpost. Wäre er nur mit Extrapost gefahren, so hätte er, um nicht mehr Geld ausgeben zu müssen, 37 Meilen zu Fuße gehen müssen; wie viel Meilen reiste er mit Extrapost, mit Schnellpost und mit Fahrpost? A. Mit Extrapost 30 Meilen, mit Schnellpost 25 Meilen, mit Fahrpost 45 Meilen.

101) Jemand kauft 3 Fässer Wein, (von dem ersten kostet das Quart 16 Sgr., von dem zweiten 20 Sgr., von dem dritten 8 Sgr.) für 78 Thlr.; nähme er $\frac{3}{5}$ von dem ersten und $\frac{2}{3}$ von dem zweiten Fasse und machte daraus eine Mittelsorte, so könnte er das Quart derselben für 18 Sgr. verkaufen; wollte er aber aus allen drei Sorten eine Mittelsorte machen, indem er aus dem ersten Fasse die Hälfte, aus dem zweiten das Drittel und aus dem dritten das Viertel nähme, so könnte er diese mit $14\frac{1}{3}$ Sgr. à Quart verkaufen; wie viel Quart enthielt jedes Faß? A. Das erste 50, das zweite 45, das dritte 80 Quart.

102) In einer Gesellschaft bezahlte jeder Mann 15 Sgr., jede Frau 12 Sgr., jedes Kind 6 Sgr., zusammen 33 Thlr.; ein andermal gingen 8 Männer mit ihren Frauen und Kindern, deren letztere zusammen 24 waren, nicht mit, und man bezahlte bei denselben Preisen wie das erstemal zusammen 21 Thlr.; übrigens waren beim erstenmale gerade so viel Kinder als Erwachsene bei der Gesellschaft; wie viel Männer, Weiber und Kinder zählte die Gesellschaft das erstemal? A. Da die erste und zweite Bedingung der Aufgabe auf dieselbe Gleichung führt, so ist die Aufgabe nicht bestimmt.

103) Käme aber bei 102 noch die Bedingung hinzu, daß das, was das erstemal die Männer bezahlt hätten, sich zu dem, was die Frauen und Kinder zusammen bezahlt hätten, wie 5 : 6 verhalte, wie würde dann die Auflösung sein? A. 30 Männer, 20 Frauen und 50 Kinder.

104) Ein Viehhändler kauft 230 Stück, theils Pferde, theils Ochsen, theils Schafe, und zwar gab er im Durchschnitt für ein Pferd 70 Thlr., für einen Ochsen 40 Thlr., für ein Schaf 5 Thlr. Hätte er alles für 8000 Thlr. wieder verkauft, so hätte er $11\frac{1}{9}$ pr. profitirt; als er aber dies nicht that, so starben ihm nach einiger Zeit 5 Pferde, 8 Ochsen und 20 Schafe, und er mußte nun, um wenigstens das, was er gegeben, wieder zu bekommen, ein Pferd 8 Thlr., einen Ochsen 5 Thlr. und ein Schaf $\frac{5}{8}$ Thlr. theurer verkaufen, als er sie gekauft; wie viel hatte er gekauft? A. 50 Pferde, 80 Ochsen und 100 Schafe.

105) A, B und C spielen; A und B verlieren im ersten Spiele so viel, als C hat, an C; im zweiten Spiele verlieren A und C an B so viel, als dieser nach dem ersten Spiele hatte; im dritten verlieren B und C an A so viel, als dieser nach dem zweiten Spiele noch hatte; es hatte aber nach dem dritten Spiele A 54 Thlr., B 12 Thlr., C 32 Thlr.; wie viel hatte jeder vor dem Spiele? A. A 48 Thlr., B 30 Thlr., C 20 Thlr.

106) Als sie ein andermal wieder spielen, verliert im ersten Spiele A an B und C so viel, als diese haben; beim zweiten

Spiele verliert B an A und C so viel, als diese nach dem ersten Spiele hatten, beim dritten aber C an A und B so viel, als diese nach dem zweiten Spiele hatten; nach dem dritten Spiele hatte nun A so viel, als zu Anfange, B nur 10 Thlr., C aber 65 Thlr.; wie viel hatte jeder zu Anfange? A. A 100 Thlr., B 45 Thlr., C 30 Thlr.

107) Jemand hat 3 Stück Metall, wovon das erste 2 Lth. Gold, 6 Lth. Silber und 4 Lth. Kupfer, das zweite 7 Lth. Gold, 5 Lth. Silber und 8 Lth. Kupfer, das dritte 3 Lth. Gold, 2 Lth. Silber und 4 Lth. Kupfer enthält; er will von jedem etwas hinwegnehmen und Alles zu einer Masse vereinigen, die $3\frac{23}{30}$ Lth. Gold, $4\frac{1}{6}$ Lth. Silber und $5\frac{1}{15}$ Lth. Kupfer enthält; wie viel muß er von jedem der drei Metallstücke nehmen, um diese Komposition zu erhalten? A. Von dem ersten Stücke 4 Lth., von dem zweiten 6 Lth., von dem dritten 3 Lth.

108) Ein Stück Metall enthält 4 Lth. Gold, 15 Lth. Silber und 1 Lth. Kupfer, ein anderes 9 Lth. Gold, 10 Lth. Silber und 6 Lth. Kupfer, ein drittes 3 Lth. Gold, 6 Lth. Silber und 6 Lth. Kupfer; es will Jemand ein viertes Stück aus jenen dreien zusammensetzen, welches $3\frac{3}{10}$ Lth. Gold, $6\frac{1}{6}$ Lth. Silber und $3\frac{1}{30}$ Kupfer enthält; wie viel muß er zu diesem Zwecke von jedem der drei erstern Stücke nehmen? A. Von dem ersten Stücke $3\frac{1}{3}$ Lth., von dem zweiten 5 Lth., von dem dritten $4\frac{1}{6}$ Lth.

109) Um 107 und 108 ganz allgemein zu lösen, werde angenommen, daß das erste Stück Metall a Lth. Gold, b Lth. Silber und c Lth. Kupfer, das zweite a' Lth. Gold, b' Lth. Silber und c' Lth. Kupfer, das dritte a'' Lth. Gold, b'' Lth. Silber und c'' Lth. Kupfer enthalte; es soll nun ein viertes Stück zusammengesetzt werden, welches a''' Lth. Gold, b''' Lth. Silber und c''' Lth. Kupfer erhalte; es fragt sich, wie viel muß man zu dieser Komposition von jedem der drei erstern Stücke nehmen? A. Die allgemeinen Werthe, welche man für die Mengen, die von den drei Stücken zu nehmen sind, erhält, können nach den

verschiedenen Methoden bei der Auflösung der Form nach verschieden ausfallen; ziemlich elegant würden folgende Ausdrücke sein:

Von dem ersten Stücke muß man

$$\frac{[b'c'' - b''c']a''' + [a''c' - a'c'']b''' + [a'b'' - a''b']c'''}{[b'c'' - b''c']a + [a''c' - a'c'']b + [a'b'' - a''b']c}[a+b+c]$$

von dem zweiten

$$\frac{[b''c - bc'']a''' + [ac'' - a''c]b''' + [a''b - ab'']c'''}{[b''c - bc'']a' + [ac'' - a''c]b' + [a''b - ab'']c'}[a'+b'+c']$$

von dem dritten

$$\frac{[bc' - b'c]a''' + [a'c - ac']b''' + [ab' - a'b]c'''}{[bc' - b'c]a'' + [a'c - ac']b'' + [ab' - a'b]c''}[a''+b''+c'']$$

Lothe nehmen. Die Nenner der Brüche sind der Form nach, nicht aber dem Werthe nach verschieden, wovon man sich durch Auflösung der Parenthesen leicht überzeugt.

110) Man kennt die Summe von je zwei Seiten eines Dreiecks; diese Summen seien a, b, c; wie groß sind die Sei-

ten selbst? A. $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$ und $\frac{-a+b+c}{2}$ oder wenn man $\frac{a+b+c}{2} = s$ setzt, $s-c$, $s-b$ um $s-a$, woraus sich sogleich die geometrische Auflösung ergiebt.

111) 3 Regimentern, welche zur Eroberung einer Festung geführt werden, werden 10000 Thlr. versprochen, und zwar soll von dem Regimente, welches sich am meisten auszeichnet, jeder Mann 4 Thlr. erhalten, das übrig gebliebene Geld aber unter die Leute der beiden andern Regimenter gleichmäßig vertheilt werden. Würde nun der Preis der Tapferkeit dem ersten Regimente zuerkannt, so würden von den beiden andern Regimentern je 3 Mann 5 Thlr. bekommen; würde er dem zweiten Regimente zuerkannt, so erhielten je 8 Mann der beiden andern Regimenter 11 Thlr.; würde aber das dritte sich am meisten auszeichnen, so bekäme jeder Mann von den beiden andern Regimentern nur ½ Thlr.; wie stark war also jedes Regiment? A. Das erste 1000 Mann, das zweite 1400 Mann, das dritte 2200 Mann.

112) 3 Städte haben zusammen 100000 Einwohner; die erste hat 20000 weniger, als die andern beiden zusammen, die dritte aber 50000 weniger, als die erste und zweite zusammen; wie viel hat jede Einwohner? A. Die erste 40000, die zweite 35000, die dritte 25000.

113) In 450 Thaler sollen sich 3 Personen A, B und C so theilen, daß das, was A bekommt, zu dem, was B und C zusammen bekommen, sich verhält, wie 5 : 13; das Drittel dessen, was A, das Zehntel dessen, was B, und das Funfzehntel dessen, was C bekommen soll, beträgt $70\frac{1}{3}$ Thlr.; wie viel bekam jeder? A. A 125 Thlr., B 210 Thlr., C 115 Thlr.

114) Vier Personen haben zusammen 68 Thlr.; A und D haben zusammen 8 Thlr. mehr, als B und C zusammen haben; A und B besitzen ebenso viel, als C und D; das Vermögen des A und C zusammen verhält sich aber zu dem des B und D zusammen, wie $6\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2}$. Wie viel hatte jeder? A. A 15 Thlr., B 19 Thlt., C 11 Thlr., D 23 Thlr.

115)*) Ein Körper hat so viel Flächen als Ecken und 10 Winkel mehr, als er Flächen und Ecken zusammen hat; wie viel hat er Flächen, Ecken, Kanten und Winkel? A. 7 Flächen, 7 Ecken, 12 Kanten uud 24 Winkel.

116) Ein anderer Körper hat ebenfalls so viel Flächen als Ecken; die Anzahl aller Flächen, Ecken Kanten, und Winkel beträgt zusammen 82; wie viel hat er von jeden? A. 11 Flächen, 11 Ecken, 20 Kanten und 40 Winkel.

117) Vier Fässer enthalten zusammen 167 Quart; wollte man aus dem zweiten und vierten vollen das erste und dritte leere füllen, so würden 3 Quart fehlen; das erste volle würde gerade hinreichen, um $\frac{3}{8}$ des zweiten, $\frac{1}{7}$ des dritten und die Hälfte des vierten zu füllen; wollte man hingegen mit dem dritten vollen nur ein Drittel jedes der drei andern füllen, so würden immer noch 9 Quart fehlen; wie viel Quart enthält jedes Faß? A. Das erste 50 Quart, das zweite 40, das dritte 35, das vierte 42.

118) Vier Personen, von denen A und D zusammen 150 Thlr. mehr haben, als B und C zusammen, würfeln unter der Bedingung, daß der, welcher am wenigsten wirft, jedem der 3 anderen so viel geben muß, als jeder vor dem Wurfe gerade hat. Zuerst verliert A, dann B und dann C, und es findet sich, daß A jetzt gerade so viel hat, als vor dem Spiele B, B so viel, als vor dem Spiele C, C so viel, als vor dem Spiele D; wie viel hatte jeder vor dem Spiele? A. A 400, B 200, C 100, D 50 Thlr.

---

*) Obgleich in 115 und 116 nur für 2 Gleichungen zwischen den 4 unbekannten Größen Bedingungen liegen, so sind diese Aufgaben dennoch nicht unbestimmt, da in der Stereometrie gezeigt wird, daß jeder Körper doppelt so viel Winkel als Kanten hat, und daß bei jedem Körper die Summe der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Seitenflächen immer um zwei größer ist, als die Anzahl seiner Kanten, woraus sich sogleich noch zwei Gleichungen ergeben.

119) Die Summe sämmtlicher 4 Buchstaben einer Stadt, wenn man dieselben nach der Reihenfolge im Alphabete mit Zahlen bezeichnet, beträgt 5 mehr, als das Doppelte des ersten Buchstabens; die Summe des ersten und zweiten verhält sich zur Summe des vierten und dritten, wie $10\frac{1}{3}$: 6; die Hälfte des ersten, das Drittel des zweiten und das Fünftel des dritten sind zusammen um 2 größer, als der vierte; die Summe der beiden mittelsten verhält sich aber zur Summe der beiden äußern, wie 2 : 5; welche Stadt ist es? A. Wien.

120) Eine Zahl von 4 Ziffern gilt $91\frac{9}{10}$ mal mehr, als die Summe der 4 Ziffern; wären die beiden mittelsten jede um 1 kleiner, so würden die vier Zahlen eine arithmetische Proportion bilden; ebenso würden sie in arithmetischer Proportion stehen, wenn die höchste (die erste links) um 2 erhöht, die zweite und vierte aber mit einander vertauscht würden; kehrt man aber die Zahl um, so gilt sie 6543 mehr, als früher; welche Zahl ist es? A. 1838.

121) Vier Fässer enthalten zusammen 226 Quart. Wird das erste leere aus dem zweiten vollen gefüllt, so bleibt diesem noch $\frac{1}{6}$ seines Inhalts; wird das zweite leere aus dem dritten vollen gefüllt, so bleibt diesem $\frac{1}{8}$ seines Inhalts; mit dem vierten vollen aber könnte man das erste und zweite ganz und das dritte noch zur Hälfte füllen; wie viel Quart enthält jedes Faß? A. Das erste 35, das zweite 42, das dritte 48, das vierte 101 Quart.

122) A und B haben zusammen 15 Thlr., C und D zusammen 30 Thlr., E einen Thaler mehr als A, C 5 mal so viel, als E, im Durchschnitt aber hat jeder 9 Thlr. 18 Sgr.; wie viel hat jeder? A. A. 2, B 13, C 15, D 15 und E 3 Thlr.

123) A, B, C, D, E haben zusammen 1960 Thlr. Sie berechnen, daß, wenn sie zusammen ein Geschäft anfingen und bei demselben 10 pr. gewännen, D noch einmal so viel, als B,

und E 44 Thlr. mehr haben würde, als A und B zusammen; verlören sie aber bei dem Geschäfte 10 pr., so würde E so viel als B und C zusammen, D aber immer noch 16 Thlr. mehr haben, als E früher hatte. Wie viel hatte jeder? A. 200 Thlr., B 320 Thlr., C 240 Thlr., D 640 Thlr., E 560 Thlr.

124) Sechs Personen spielen und zwar so, daß der, welcher verliert, allen übrigen so viel geben muß, als sie schon haben. Zuerst verliert A, dann B, dann C, dann D, dann E, endlich F. Nach diesen 6 Spielen hat nun A noch a Thlr., B b Thlr., C c Thlr., D d Thlr., E e Thlr. und F f Thlr. Es fragt sich, wie viel jeder vor dem Spiele gehabt habe? A. Setzt man der Kürze wegen $a + b + c + d + e + f = s$, so findet sich, daß A $\frac{32s + a}{64}$, B $\frac{16s + b}{64}$, C $\frac{8s + c}{64}$, D $\frac{4s + d}{64}$, E $\frac{2s + e}{64}$ und F $\frac{s + f}{64}$ Thaler vor dem Spiele gehabt hat.

125) Wenn 124 ganz allgemein gefaßt und angenommen werden sollte, daß n Personen unter der angegebenen Bedingung spielen und daß zuerst A_1, dann A_2, dann A_3, dann A_4 und zuletzt A_n verliere, daß aber nach dem Spielen A_1 noch a_1 Thlr., A_2 noch a_2 Thlr. und so fort A_n noch a_n Thlr. habe: wie viel müßte dann jeder vor dem Spielen gehabt haben? A. Setzt man der Kürze wegen $a_1 + a_2 + a_3 \ldots a_n = s$, so findet sich, daß

$$A_1 \quad \frac{2^{n-1}s + a_1}{2^n}$$

$$A_2 \quad \frac{2^{n-2}s + a_2}{2^n}$$

$$A_3 \quad \frac{2^{n-3}s + a_3}{2^n}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_p \quad \frac{2^{n-p}s + a_p}{2^n}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_{n-1} \quad \frac{2s + a_{n-1}}{2^n}$$

und $A_n \quad \frac{s + a_n}{2}$ gehabt habe.

Siebzehntes Kapitel.

Gleichungen vom zweiten Grade mit einer und mit mehreren Unbekannten.

1)	$9x^2 = 225$	$x = \pm 5$
2)	$2x^2 = x^2 + \frac{1}{4}$	$x = \pm \frac{1}{2}$
3)	$5 : x = x : 45$	$x = \pm 15$
4)	$a : bx = cx : d$	$x = \pm \sqrt{\frac{ad}{bc}}$
5)	$5x(3 - x) = x - 2(10 - 7x)$	$x = \pm 2$
6)	$b(y^2 + a) = c$	$y = \pm \sqrt{\frac{c}{b} - a}$
7)	$z(z - 1) = 4 + 5\left(9 - \frac{z}{5}\right)$	$z = \pm 7$
8)	$2z(2 + z) = z^2 + 4(z + 7\frac{9}{16})$	$z = \pm 5\frac{1}{2}$

9) $x(x-1) = 5 - (1 - \frac{19}{20}x)x$ $\quad x = \pm 10$

10) $xy = 30$ $\quad x = \pm 5$

$\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$ $\quad y = \pm 6$

11) Welche Zahl ist es, die mit ihrer Hälfte multiplicirt 48 mehr giebt, als wenn man sie mit ihrem Sechstel multiplicirt? A. ± 12.

12) Von welcher Zahl ist das Quadrat um $52\frac{1}{2}$ größer, als das Product des dritten und fünften Theiles derselben? A. $\pm 7\frac{1}{2}$.

13) Zwei Zahlen, von denen die eine a mal größer ist, als die andere, geben mit einander multiplicirt b; welche Zahlen sind es? A. Die a mal größere ist $\pm\sqrt{ab}$, die andere $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

14) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen beträgt 45; die größere von den beiden Zahlen ist aber die mittlere geometrische Proportionale zwischen der kleineren und deren Vierfachen; welche Zahlen sind es? A. ± 3 und ± 6.

15) Ein Truppencorps marschirte in einer regelmäßigen Colonne mit a Mann mehr in der Tiefe, als in der Fronte; wenn aber die Tiefe a Mann betragen sollte, so würde die Fronte um b gegen früher vermehrt werden müssen; wie stark war das Corps? A. $ab + a\sqrt{ab}$.

16) Wenn mir jeder Tag, den ich an einer Arbeit zugebracht habe, sagt Jemand, nur halb so viel Silbergroschen eingebracht hätte, als ich Tage an der Arbeit gearbeitet habe, so hätte ich 135 Thlr. verdient; wie lange habe ich an der Arbeit zugebracht? A. 90*) Tage.

---

*) Die Rechnung giebt, wie immer, zwei Werthe: ± 90. Aber -90 Tage würde hier keinen Sinn geben. Es sollen daher auch im Folgenden die negativen oder imaginären Werthe, wo der Sinn der Aufgabe dieselben nicht zuläßt, weggelassen, oder wenigstens in Parenthesen eingeschlossen werden.

17) Wenn man zu einer Zahl 7 addirt und dann von derselben Zahl 7 subtrahirt, so ist das Produkt dieser Summe und dieser Differenz um 23 größer, als das halbe Quadrat der Zahl; welche Zahl ist es? A. $\pm$ 12.

18) Welche Zahl aber muß man zu 7 addiren und von 7 subtrahiren, damit das Product dieser Summe und Differenz um $35\frac{1}{2}$ größer sei, als das halbe Quadrat der Zahl? A. ± 3.

19) Welche Zahl muß man zu n addiren, und von n subtrahiren, damit das Product dieser Summe und Differenz gleich m werde? A. $\pm\sqrt{n^2 - m}$.

20) Von welcher Zahl muß man n subtrahiren, damit das Product dieser Differenz und der Summe jener Zahl und der Zahl n gleich m werde? A. $\pm\sqrt{n^2 + m}$.

21) Die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks sei h, die eine Kathete a; wie groß ist die andere Kathete? A. $\sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{(h + a)(h - a)}$

22) Von einem Rhombus kennt man die Seite a und eine Diagonale d; wie groß ist die andere Diagonale? Antw. $\frac{1}{2}\sqrt{(2a + d)(2a - d)}$

23) Die Seite eines Rechtecks sei a [5° 7′ 3″ dec], die Diagonale d [7° 9′ 3″]; wie groß ist der Inhalt desselben? A. $a\sqrt{(d + a)(d - a)}$ [31 □° 18 □′ 74 □″,732..]

24) Die Seite eines Quadrats sei a [5′], wie groß ist der Radius des umschriebenen Kreises? A. $a\sqrt{0,5}$ [3,535534..]

25) A hat eben so oft 5 Thlr., wie oft B 6 Thlr. hat, und eben so oft 2 Thlr., als C 5 Thlr. hat; wenn man aber das Geld des A so oft nimmt, als B Thlr. hat, das Geld des B so oft, als C Thlr. hat, und das Geld des C so oft, als D Thlr. hat, und diese drei Produkte zu einander addirt, so erhält man 670 Thlr.; wie viel hat jeder? A. A 10 Thlr., B 12 Thlr., C 25 Thlr.

26) Als eine Anzahl Personen 7200 Thlr. zusammen bringen sollten, ergab es sich, daß jede noch einmal so viel Thaler geben mußte, als es Personen waren; wie viel waren es Personen? Antw. 60.

27) $\sqrt[x]{38\frac{227}{512}} = 1{,}5^x$ $\qquad x = \pm 3$

28) $\sqrt[x]{30517\frac{37}{64}} = 2{,}5^x$ $\qquad x = \pm 3{,}356995\ldots$

29) $xy = a + y^2$ $\qquad x = \pm b\sqrt{\frac{a}{b-1}}$

$x = by$ $\qquad y = \pm\sqrt{\frac{a}{b-1}}$

30) Wenn Jemand jedem Armen halb so viel Silbergroschen geben wollte, als die Anzahl der Armen beträgt, so würde er gerade so viel über $4\frac{1}{2}$ Thlr. ausgeben müssen, als er unter $4\frac{1}{2}$ Thlr. geben müßte, wenn er jedem Armen so viel Silbergroschen geben wollte, als der dritte Theil der Anzahl der Armen beträgt; wie viel waren es Arme? A. 18.

31) $x^2 + ax = b$ $\qquad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} =$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{4b + a^2}}{2}$$

32) $x^2 + x = 1$ $\qquad x = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}$

33) $3x^2 - 7x = 2(15 + x)$ $\qquad x = 5$ und $x = -2$

34) $\frac{1}{2}y^2 - 6 = \frac{y(y-7)}{4} - 9$ $\qquad y = -3$ und $= -4$

35) $x^2 + 2x = -10$ $\qquad x = -1 \pm 3\sqrt{-1}$

36) $1\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{4}(23z - 21)$ $\qquad z = 1\frac{1}{2}$ und $z = 2\frac{1}{3}$

37) $2x(x - 6) = 7(x - 5)$ $\qquad z = 7$ und $z = 2\frac{1}{2}$

38) $3x(x-5) = x(9-x)+28 \qquad x = 7,\ x = -1$

39) $\frac{300-x}{20-x} - \frac{35}{x} = \frac{x-14}{x} + 45\frac{1}{6} \qquad x = 14,\ x = -\frac{180}{271}$

40) $\frac{5x(x-1)}{x-2} = 10(7-x) \qquad x = 4,\ x = 2\frac{1}{3}$

41) $(ax-b)x = n(x-c) \qquad x = \frac{b+n \pm \sqrt{(b+n)^2 - 4acn}}{2a}$

42) $\frac{a+x}{a-x} = \frac{b+x}{x} \qquad x = -\frac{b}{4} \pm \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{b^2}{16}}$ oder

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(8a+b)b}}{4}$$

43) Die Summe zweier Zahlen beträgt 34; dividirt man die größere durch die kleinere, so erhält man $3\frac{1}{2}$ mehr, als die kleinere Zahl beträgt; welche Zahlen sind es? A. 30 und 4 oder $42\frac{1}{2}$ und $-8\frac{1}{2}$.

44) Zieht man eine Zahl von 42 ab und dividirt diese Differenz durch das Doppelte der Zahl und addirt dazu die Zahl selbst, so erhält man 9; welche Zahl ist es? A. 6 oder $3\frac{1}{2}$.

45) Giebt es eine Zahl, deren Hälfte ins Quadrat erhoben drei weniger giebt, als die Zahl selbst? A. Die imaginäre Größe $2 \pm \sqrt{-8} = 2(1 \pm \sqrt{-2})$.

46) Ich multiplicire eine Zahl mit ihrem Fünftel, subtrahire davon ihr Drittel und erhalte dadurch 5 weniger, als ihr Dreifaches? welche Zahl ist es? 15 oder $1\frac{2}{3}$.

47) Welche Zahl giebt mit ihrem Viertel multiplicirt 24 mehr, als die Zahl selbst beträgt? A. 12 oder -8.

48) Die Zahl a soll so getheilt werden, daß das Produkt der beiden Theile gleich b wird; welches sind die beiden Theile? A. $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ und $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$.

49) In 100 Thlr. theilten sich eine Anzahl Leute und es bekam jeder $2\frac{1}{2}$ Thlr. mehr, als wenn sich zwei Leute mehr hinein getheilt hätten; wie viel waren es? A. 8.

50) Welche Zahl ist es, deren Viertel mit ihrem Fünftel multiplicirt 180 mehr giebt, als die Zahl selbst beträgt? Antw. 70,827.. oder 50,827..

51) Welche Zahl giebt mit der um 1 verminderten Zahl multiplicirt $48\frac{3}{4}$? A. $7\frac{1}{2}$ oder $-6\frac{1}{2}$.

52) Denke dir eine Zahl, addire 4 dazu, multiplicire die so erhaltene Zahl mit der gedachten, addire dazu 2 und du bekommst die gedachte Zahl wieder; welche ist es? A. —1 und —2.

53) Wenn man von einer Zahl 8 subtrahirt, das, was herauskommt, mit dem Doppelten der Zahl multiplicirt und zu diesem Producte 9 addirt, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl: welche Zahl ist es? A. 9 und $\frac{1}{2}$.

54) Welche Zahl giebt, wenn sie um $12\frac{1}{2}$ vermindert wird, ihr Quadrat? A. $\frac{1 \pm 7\sqrt{-1}}{2}$

55) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß, wenn man sie von 22 und dann von 8 subtrahirt, diese beiden Differenzen sich zu einander verhalten, wie das Sechsfache der Zahl zu 5? A. $5\frac{1}{2}$ oder $3\frac{1}{3}$.

56) Eine Zahl mit ihrer Hälfte multiplicirt und dieses Produkt zu ihrer Hälfte addirt, giebt 15; welche Zahl ist es? A. +5 oder —6.

57) 34 soll in zwei solche Theile zerlegt werden, daß der eine mit der Differenz beider Theile multiplicirt 120 giebt? A. Die Theile sind 20 und 14, oder — 3 und 37.

58) Von welcher Zahl beträgt die Summe der Zahl, ihrer Hälfte, ihres Drittels und ihres Viertels 5 mehr, als das Produkt ihres Fünftels und ihres Sechstels? A. Von 60 oder $2\frac{1}{2}$.

59) Eine Anzahl Personen hatte 200 Thlr. zu bezahlen; da aber 2 kein Geld hatten, so mußte jeder der übrigen 5 Thlr. mehr bezahlen, als sonst nöthig gewesen wäre; wie viel Personen waren es? A. 10.

60) Wir mußten, sagt Jemand aus einer Gesellschaft, a Thlr, [5 Thlr. 10 Sgr.] bezahlen; da aber n [1] von uns freigehalten werden sollten, so mußte jeder der übrigen b Thlr. [8 Spf.] mehr bezahlen, als er sonst hätte bezahlen müssen; wie viel waren wir und wie viel mußte jeder bezahlen, wenn Niemand freigehalten werden sollte, und wie viel, wenn die n [1] freigehalten werden sollten? A. Es waren $\frac{bn+\sqrt{(4a+bn)bn}}{2b}$ *) [16] Personen; jede hätte eigentlich müssen $\frac{2ab}{bn+\sqrt{(4a+bn)bn}}$ Thlr. [10 Sgr.] bezahlen; da aber n [1] freigehalten wurden, so mußte jeder der übrigen $\frac{b(2a+bn+\sqrt{(4a+bn)bn})}{bn+\sqrt{(4a+bn)bn}}$ Thlr. [$10\frac{2}{3}$ Sgr.] bezahlen.

61) A reist von M nach N und legt täglich 3 Meilen zurück; nachdem er schon 20 Meilen zurückgelegt hatte, reist B von N nach M und legte täglich $\frac{1}{12}$ des ganzen Weges zurück. Nachdem B so viel Tage gereist war, als er täglich Meilen zurücklegte, begegnet er dem A; wie weit ist demnach M von N entfernt? A. M kann nach dieser Angabe 60 oder 48 Meilen von N entfernt sein.

62) Es kauft Jemand ein Stück Tuch und verkauft es für 96 Thlr. und gewinnt daran so viel pr. als der vierte Theil

---

*) Es kann hier nur $+\sqrt{(4a+bn)bn}$ genommen werden: denn da a immer positiv sein muß, so ist offenbar $\sqrt{(4a+bn)bn} > bn$; es würde daher $\frac{bn-\sqrt{(4a+bn)bn}}{2b}$ negativ sein, was der Sinn der Aufgabe nicht zuläßt.

das Einkaufspreises beträgt; wie theuer hatte er es eingekauft? A. Für 80 Thlr.

63) Jemand kauft eine Anzahl Tücher für 150 Thlr.; wären für dasselbe Geld 3 Tücher mehr gewesen, so hätte ihm ein Tuch $2\frac{1}{2}$ Thlr. weniger gekostet; wie viel kaufte er Tücher und wie viel kostete eins? A. Er kaufte 12 Tücher, eins kostete $12\frac{1}{2}$ Thlr.

64) Ein mit 10000 Thlrn. angefangenes Geschäft bringt im ersten Jahre Verlust und mit dem Reste des Kapitals fortgesetzt im zweiten Jahre eben so viel pr. Gewinn, als im ersten Verlust; der Gewinn im zweiten Jahre betrug aber 900 Thlr.; wie viel pr. verlor man im ersten und gewann man im zweiten Jahre? A. 10 pr. oder 90 pr.

65) Jemand fängt mit a Thlrn. ein Geschäft an und verliert im ersten Jahre; mit dem Reste seines Vermögens setzt er das Geschäft fort und gewinnt im zweiten Jahre eben so viel pr., als er im ersten verlor; er findet, daß sein Vermögen nun b Thlr. beträgt; wie viel pr. verlor und gewann er? A. $100\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ pr.

66) Wenn er aber im ersten Jahre gewonnen hätte, und als er mit seinem so vermehrten Kapitale das Geschäft fortsetzte, im zweiten Jahre eben so viel pr., als er im ersten Jahre gewonnen, verloren, am Schlusse des zweiten Jahres aber gefunden hätte, daß sein Vermögen b Thlr. betrüge; wie viel pr. gewann und verlor er da? A. $100\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ pr.

Aus 65 und 66 ergiebt sich, daß es einerlei sei, ob der Verlust im ersten oder zweiten und der Gewinn im zweiten oder ersten Jahre stattfinde; da $b < a$ sein muß, so erhellet, daß bei den Bedingungen der Aufgaben 65 und 66 immer Verlust stattfinden muß.

67) Wenn er aber beide Jahre gleichviel pr. gewonnen hätte, und sein Kapital wäre von a auf b Thlr. gewachsen, wie viel pr. betrüge dann der Gewinn? A. $100\left[\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right]$ pr.

68) Wenn er endlich beide Jahre gleichviel pr. verloren hätte und sein Kapital wäre von a auf b herabgesunken, wie viel pr. betrüge dann der Verlust? A. $100\left[1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right]$ pr.

69) Jemand kaufte eine Anzahl Tücher für 6 Thlr., jedes Tuch kostete 3 Sgr. mehr, als es Tücher waren, wie viel kaufte er also Tücher? A. 12.

70) $\frac{x^2 - y^2}{4} = y + 1$ $\quad$ $x = 6,\ y = 4$ oder

$\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}y$ $\quad$ $x = -1\frac{1}{5},\ y = -\frac{4}{5}$

71) $x(y + 1) = 20$ $\quad$ $x = 5,\ y = 3$ oder

$\frac{5}{x} = \frac{3}{y}$ $\quad$ $x = -6\frac{2}{3},\ y = -4$

72) $(x + y) : (x - y) = 2x : 3y$ $\quad$ $x = 12,\ y = 4$ oder

$\frac{1}{x + y} = \frac{8}{x^2 - y^2}$ $\quad$ $x = 2\frac{2}{3},\ y = -5\frac{1}{3}$

73) $x : y = y : 2x + 1$

$x : y = 2 : 3$ $\quad$ $x = 4,\ y = 6$

74) $x^2 + y^2 + x + y = a$ $\quad$ $x = \frac{\pm\sqrt{1 + 2(a + b)} - 1}{2}$

$x^2 - y^2 + x - y = b$ $\quad$ $y = \frac{\pm\sqrt{1 + 2(a - b)} - 1}{2}$

75) $x^2 + y^2 + x + y = 18$ $\quad$ $x = 3,\ y = 2$

$x^2 - y^2 + x - y = 6$ $\quad$ $x = -4,\ y = -3$

76) $xy + x + y = a$ $\quad x = \frac{\pm\sqrt{b^2 + 4(a+1)} + b - 2}{2}$

$x - y = b$ $\quad y = \frac{\pm\sqrt{b^2 + 4(a+1)} - b - 2}{2}$

77) $x^3 - y^3 = a$ [218] $\quad x = 7,\ y = 5$ oder

$x - y = b$ [2] $\quad x = -5,\ y = -7$

allgemein $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{4a - b^3}{12b}}$

$y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{4a - b^3}{12b}}$

78)*) Von einem Quadrate kennt man die Summe der Seite und der Diagonale s; man soll die Seite und die Diagonale selbst finden. A. Die Seite ist $s[\sqrt{2} - 1]$, die Diagonale $s[2 - \sqrt{2}]$.

79) Von einem Quadrate kennt man die Differenz der Diagonale und der Seite d; wie groß ist dann die Seite und Diagonale selbst? A. Die Seite ist $d[1 + \sqrt{2}]$, die Diagonale $d[2 + \sqrt{2}]$.

80) Aus der Fläche eines rechtwinklichen Dreiecks F und der Summe der beiden Katheten s die Katheten selbst zu finden. A. Die Katheten sind $\frac{s \pm \sqrt{s^2 - 8F}}{2}$ und $\frac{s \mp \sqrt{s^2 - 8F}}{2}$

Welchen Werth darf hier F nicht übersteigen, wenn die erhaltenen Werthe reell sein sollen?

81) Aus der Fläche eines rechtwinklichen Dreiecks F und der Differenz der beiden Katheten d die Katheten selbst zu finden. A. Sie sind $\frac{\sqrt{d^2 + 8F} - d}{2}$ und $\frac{\sqrt{d^2 + 8F} + d}{2}$

Findet hier eine ähnliche Beschränkung statt, wie bei 80?

---

*) Zur Auflösung dieser und der folgenden Aufgaben bedarf es nur der Kenntniß der einfachsten geometrischen Beziehungen zwischen den Seiten und den Flächenräumen ebener Figuren, um die gehörige Anzahl von Gleichurgen aufstellen zu können.

82) Man kennt von einem rechtwinklichen Dreieck die Hypotenuse a und die Summe der beiden Katheten; wie groß sind die Katheten selbst? A. Die Katheten sind $\frac{s \pm \sqrt{2a^2 - s^2}}{2}$ und $\frac{s \mp \sqrt{2a^2 - s^2}}{2}$

Welches ist die Beschränkung?

83) Man kennt von einem rechtwinklichen Dreieck die Hypotenuse a und die Differenz der beiden Katheten d; wie groß sind die Katheten? A. $\frac{\sqrt{2a^2 - d^2} + d}{2}$ und $\frac{\sqrt{2a^2 - d^2} - d}{2}$

84) Es ist eine Linie a gegeben; man soll sie so weit verlängern, daß das Rechteck unter der Verlängerung und der Verlängerung mit der Linie dem Quadrate über einer gegebenen Linie b gleich sei; wie groß muß die Verlängerung sein? A. $\frac{\sqrt{4b^2 + a^2} - a}{2}$

85) Es ist ein Rechteck gegeben, dessen Seiten a und b sind; man soll die größere Seite a desselben in zwei solche Theile theilen, so daß die Summe der Quadrate dieser beiden Theile dem Rechtecke gleich ist. A. Der eine Theil ist $\frac{a + \sqrt{2ab - a^2}}{2}$, der andere $\frac{a - \sqrt{2ab - a^2}}{2}$

Welches ist die Beschränkung bei 85?

86) Zwei Zahlen verhalten sich zu einander, wie 7 : 5; die Summe beider verhält sich aber zur Differenz beider, wie die erste, vermehrt um 1, zur zweiten, vermindert um 19; welche Zahlen sind es? A. 35 und 25.

87) A und B haben zusammen 27 Thlr. weniger, als die Anzahl der Thaler, die man erhält, wenn man die Anzahl der Thaler des A mit der Anzahl der Thaler des B multiplicirt; A

hatte aber 3 Thlr. mehr, als B; wie viel jeder? A. A 8 Thlr., B 5 Thlr.

88) In einer Gesellschaft, wo 3 Männer mehr waren, als Frauen, bezahlte jeder Mann so viel Silbergroschen, als Frauen da waren, und jede Frau so viel, als Männer da waren; hätte jede Person gleich viel bezahlt, so hätte jede $13\frac{1}{3}$ Sgr. bezahlen müssen, damit die Zehrungskosten hätten gedeckt werden können; wie viel Männer und wie viel Frauen waren in der Gesellschaft? A. 15 Männer und 12 Frauen.

89) Auf einer Strecke von 600 Fußen machte das Vorderrad eines Wagens 5 Umdrehungen mehr, als das Hinterrad; wäre der Umfang des Hinterrades $\frac{1}{2}$ Fuß, der des Vorderrades $1\frac{1}{2}$ Fuß geringer gewesen, so würde auf derselben Strecke das Vorderrad 20 Umdrehungen mehr gemacht haben, als das Hinterrad; wie groß war demnach der Umfang des Vorderrades und des Hinterrades? A. Der Umfang des Vorderrades war $7\frac{1}{2}$, der des Hinterrades 8 Fuß.

90) Das Faß A ist zur Hälfte, das Faß B zum Drittel voll Wein; das Quart des Weines in A kostet 10 Sgr., das des Weines in B 12 Sgr.; hätte man aus dem, was in jedem Fasse war, eine Mittelsorte gemacht, so würde das Quart derselben $\frac{2}{9}$ Sgr. wohlfeiler gewesen sein, als wenn man aus beiden gefüllten Fässern eine Mittelsorte gemacht hätte; wäre aber das Faß A zum Drittel, B zur Hälfte voll gewesen, so wäre im Fasse A $13\frac{1}{2}$ Quart weniger gewesen, als im Fasse B; wie viel Quart faßte jedes Faß? A. Das Faß A 50, das Faß B 60 Quart; oder das Faß A $45\frac{5}{7}$, das Faß B $57\frac{1}{7}$ Quart.

91) Die Summe zweier Zahlen durch ihre Differenz dividirt, giebt $1\frac{1}{6}$ mehr, als ihre Summe; subtrahirt man aber von dem Dreifachen der ersten das Doppelte der zweiten, so bleibt $\frac{5}{6}$ weniger, als ihre Summe; welche Zahlen sind es? A. $3\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{2}$, oder $-\frac{11}{30}$ und $\frac{1}{30}$.

92) Die Summe zweier Zahlen ist gleich 12, die Summe ihrer Quadrate gleich $76\frac{1}{2}$; welche Zahlen sind es? A. $7\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$.

93) Wenn ich die beiden Zahlen, die ich mir denke, mit einander multiplicire, so kommt $1\frac{1}{6}$ mehr heraus, als wenn ich sie zu einander addire; addire ich zu jeder $2\frac{1}{3}$, so ist die eine noch einmal so groß, als die andere; welche Zahlen sind es? A. $1\frac{1}{2}$ und $5\frac{1}{3}$ oder $-1\frac{1}{6}$ und 0.

94) Es verkaufen 2 Personen einige Ellen Zeug, zusammen für 162 Thlr., A drei Ellen weniger, als B; A sagt zu B: Aus deinem Zeuge hätte ich 81 Thlr. gelöst; B zu A; aus deinem hätte ich 80 Thlr. gelöst; wie viel Ellen hatte jeder? A. A 24, B 27 Ellen.

95) Eine Gemeinde enthält 65 theils bemittelte, theils unbemittelte Familien; von letzteren holt sich jede bei jeder der vorigen monatlich 1 Sgr. und der Almosenvorsteher berechnet, daß dadurch monatlich $33\frac{1}{3}$ Thlr. gegeben würden; wie viel enthält die Gemeinde bemittelte und unbemittelte Familien? A. 40 bemittelte und 25 unbemittelte, oder 25 bemittelte und 40 unbemittelte.

96) Wenn die Gemeinde n Familien gehabt hätte und jede unbemittelte sich bei jeder bemittelten a Thlr. geholt hätte, das ganze Almosen aber b Thlr. gewesen wäre; wie viel wären dann unter den n Familien bemittelte und unbemittelte gewesen? A. $\frac{1}{2}n \mp \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{b}{a}}$ bemittelte und $\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{b}{a}}$ unbemittelte.

97) Zwei legen zusammen 110 Thlr. zu einem Geschäfte ein; der erste läßt sein Geld 5, der zweite 8 Monate lang stehen und jeder zieht bei der Theilung mit Kapital und Gewinn 90 Thlr.; wie viel hat jeder eingelegt? Antw. Der erste 60 Thlr., der zweite 50 Thlr.

98) Zwei legen zusammen 200 Thlr. in ein Geschäft ein; A ließ sein Geld 4 Monate stehen, B 5 Monate; A bekommt an Einlage und Gewinn 144 Thlr. zurück, B 100 Thlr.; wie viel hatte jeder eingelegt? A. A 120 Thlr., B 80 Thlr.

99) Um 98 allgemein zu lösen, werde angenommen, daß beide zusammen a Thlr. eingelegt hätten, A, welcher sein Geld n Monate habe stehen lassen, habe b Thlr. an Einlage und Gewinn erhalten, B, welcher es m Monate stehen ließ, c Thlr.; es fragt sich wir viel jeder eingelegt hat? Antw.

A legte ein $$\frac{(m-n)a+nc+mb\pm\sqrt{[(nc+mb)^2+2(m-n)(nc-mb)a+(m-n)^2a^2]}}{2(m-n)}\text{ Thlr.}$$

B aber $$\frac{(m-n)a-(nc+mb)\mp\sqrt{[(nc+mb)^2+2(m-n)(nc-mb)a+(m-n)^2a^2]}}{2(m-n)}\text{ Thlr.}$$

100) Jemand verleiht zwei Kapitale, von denen das eine um 300 Thlr. größer ist, als das andere; auch bekam er von dem größern $1\frac{1}{2}$ pr. mehr, als von dem kleineren; die jährlichen Zinsen des kleineren betrugen nun 15 Thlr., die des größeren 36 Thlr.; es fragt sich, wie groß waren beide Kapitale, und zu welchem Zinsfuß waren sie ausgeliehen? A. Das kleinere betrug 500 Thlr. und war zu 3 pr. ausgeliehen, das größere betrug 800 Thlr. und war zu $4\frac{1}{2}$ pr. ausgeliehen; oder das kleinere betrug 600 Thlr. und war zu $2\frac{1}{2}$ pr. ausgeliehen, und das größere betrug 900 Thlr. und war zu 4 pr. ausgeliehen.

101) Angenommen, das größere Kapital wäre um n Thlr. größer gewesen, als das kleinere, und um c pr. höher ausgeliehen gewesen, die jährlichen Zinsen aber hätten von dem kleineren Kapitale a Thlr., von dem größeren b Thlr. betragen; wie groß wären da die beiden

Kapitale gewesen und wie groß der Zinsfuß, zu welchem sie ausstanden? A. Das kleinere Kapital betrug

$$\frac{100(b-a)-nc \pm \sqrt{[100(b-a)-nc]^2-400anc}}{2c} \text{ Thlr.}$$

und zwar zu

$$\frac{100(b-a)-nc \mp \sqrt{[100(b-a)-nc]^2-400anc}}{2n} \text{ pr.}$$

ausgeliehen; das größere Kapital aber betrug

$$\frac{100(b-a)+nc \pm \sqrt{[100(b-a)-nc]^2-400anc}}{2c} \text{ Thlr.}$$

und war zu

$$\frac{100(b-a)+nc \mp \sqrt{[100(b-a)-nc]^2-400anc}}{2n} \text{ pr.}$$

ausgeliehen.

102) A und B wollen zusammen ein Faß Wein von 180 [a] Quart Wein leeren; wenn A allein getrunken hätte, so würde er 16 [n] Tage länger getrunken haben, als wenn beide zusammen getrunken hätten; wenn aber B allein getrunken hätte, so würde er 25 [m] Tage länger getrunken haben, als wenn beide zusammen getrunken hätten; es frägt sich, wie viel Quart trank jeder täglich? A. A 5 und B 4 Quart; oder allgemein A $\frac{a(n \pm \sqrt{nm})}{(n-m)n}$ und B $\frac{a(m \mp \sqrt{nm})}{(m-n)m}$ Quart.

103) $x : y = (z+1) : 4$ $\quad x = 3$ oder $x = 35$

$x + y + z = 10$ $\quad y = 2$ oder $y = -14$

$x + y + 3 = \frac{10+x+z-y}{2}$ $\quad z = 5$ oder $z = -11$

104) $x : y = y : z$ $\quad x = 2$

$(x+y) : (y+z) = 2:4$ $\quad y = 4$

$x - y + z = 6$ $\quad z = 8$

105) $$x^2+y^2+z^2=a \qquad x=\frac{b^2+a\mp\sqrt{16ab^2-3(b^2+a)^2}}{4b}$$

$$x+y+z=b \qquad y=\frac{b^2-a}{2b}$$

$$x:y=y:z \qquad z=\frac{b^2+a\pm\sqrt{16ab^2-3(b^2+a)^2}}{4b}$$

106) $$(x+y):(z+\tfrac{1}{4})=2:1 \qquad x=5\tfrac{1}{2} \text{ oder } x=-\tfrac{1825}{10626}$$

$$3y:(2x-\tfrac{1}{3}z)=7:3 \qquad y=7 \qquad y=-\tfrac{11}{69}$$

$$(x+\tfrac{1}{2}):(y-3)=z:4 \qquad z=6 \qquad z=-\tfrac{32}{77}$$

107) $$x+y+z=31 \qquad x=7 \text{ oder } x=11$$

$$x+z=y+5 \qquad y=13$$

$$xz=6y-1 \qquad z=11 \text{ oder } z=7$$

108) $$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=a \qquad x=\sqrt{\frac{2abc}{ab+bc-ac}}$$

$$\frac{y^2z^2}{y^2+z^2}=b \qquad y=\sqrt{\frac{2abc}{-ab+bc+ac}}$$

$$\frac{x^2z^2}{x^2+z^2}=c \qquad z=\sqrt{\frac{2abc}{ab-bc+ac}}$$

109) 3 Zahlen stehen in stetiger geometrischer Proportion, die Summe der ersten und zweiten, die Summe der zweiten und dritten und die Summe der dritten und ersten stehen in stetiger arithmetischer Proportion, die Summe aller drei Zahlen beträgt aber 9 oder allgemein a; welche Zahlen sind es? A. 3, 3 und 3, oder 3, —6 und 12. Allgemein $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}a$ und $\frac{1}{3}a$, oder $\frac{1}{3}a$, $-\frac{2}{3}a$ und $\frac{4}{3}a$.

110) Eine dreizifferige Zahl gilt 18 mehr, als das Quadrat der Summe ihrer Ziffern beträgt; kehrt man die Zahl um, so gilt sie 594 mehr, als vorher; wenn man aber von der mittelsten Ziffer 1 subtrahirt, so stehen die drei Ziffern in einer stetigen arithmetischen Proportion; welche Zahl ist es? A. 379.

111) A und B besitzen zusammen 100 Thlr.; sie haben Schulden, und zwar A 8 Thlr mehr, als B; wenn A seine eigenen und noch die Schulden des B bezahlte, so hätte er 12 Thlr. weniger, als B hat; hätte aber B 4 Thlr. weniger Vermögen, als er hat, dann ständen die Schulden beider im Verhältnisse ihres Vermögens; wie viel besaß jeder, und wie viel hatte jeder Schulden? Antw. A besaß 60, B 40 Thlr., A hatte 20, B 12 Thlr. Schulden.

112) Jemand hat zwei Stück Tuch, jedes von gleich viel Ellen; er nimmt sich vor, das eine $\frac{1}{2}$ Thlr. à Elle billiger zu verkaufen, als das andere, und berechnet, daß er dann von beiden Stücken 135 Thlr. lösen werde; er verkauft sehr bald 25 Ellen von der billigeren Sorte; als aber der Käufer, nachdem er die 25 Ellen schon hatte, dieselben gern gegen das feinere Tuch umtauschen wollte, bekam er von dem feineren Stücke $\frac{2}{3}$ und man versicherte ihm, daß dies denselben Werth habe, wie die 25 Ellen des weniger feineren; wie viel Ellen hatte jedes Stück und was kostete die Elle von jedem? A. Jedes Stück hatte 30 Ellen und das billigere kostete à Elle 2 Thlr., das andere $2\frac{1}{2}$ Thlr.

113) Die Summe dreier Zahlen beträgt a, die Summe ihrer Quadrate b, wenn man aber zur Summe der ersten und dritten c addirt, so erhält man das Doppelte der zweiten; welche Zahlen sind es? A. Die erste Zahl ist

$$\frac{2a - c \pm \sqrt{3[6b - 2a^2 - c^2]}}{6}$$, die mittelste $\frac{a + c}{3}$

die letzte $$\frac{2a - c \mp \sqrt{3[6b - 2a^2 - c^2]}}{6}$$

114) Von einem rechtwinklichen Dreiecke kennt man die Summe der beiden Katheten s und die auf die Hypotenuse von der Spitze des rechten Winkels gefällte Normale; wie groß sind die beiden Katheten, die Hypotenuse und die Fläche des Dreiecks?

A. Die eine Kathete ist $\frac{s \pm \sqrt{s^2 + 4p\,[p \mp \sqrt{s^2 + p^2}]}}{2}$

die andere $\frac{s \mp \sqrt{s^2 + 4p[p \mp \sqrt{s^2 + p^2}]}}{2}$, die Hypotenuse

$\pm\sqrt{s^2 + p^2} - p$ und also die Fläche $\frac{(\sqrt{s^2 + p^2} - p)p}{2}$.

115) Man kennt in einem rechtwinklichen Dreiecke die Summe der Hypotenuse und einer Kathete a, die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete b; wie groß ist die Hypotenuse und jede der beiden Katheten? A. Die Hypotenuse ist $a + b - \sqrt{2ab}$, die eine Kathete $\sqrt{2ab} - b$, die andere $\sqrt{2ab} - a$

Welche Beschränkung muß hier zwischen a und b stattfinden?

116) Aus den beiden Normalen eines gleichschenklichen Dreiecks [die Normale auf die Grundlinie heiße a, die auf die Schenkel b] die Seiten und den Inhalt des Dreiecks zu finden. A. Die Grundlinie ist $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$, die Schenkel $\frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

und der Inhalt $\frac{a^2 b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

117) 3 Zahlen stehen in stetiger arithmetischer Proportion; die Summe von allen dreien beträgt a [$6\frac{1}{2}$] mehr, als das erste Glied der Proportion; das Produkt des mittlern und letzten Gliedes aber ist b [10], welche Zahlen sind es? Antw.
$\frac{a \pm 3\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ und $\frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, im Zahlenbeispiele, $5\frac{1}{2}$, 4 und $2\frac{1}{2}$, oder 1, $2\frac{1}{2}$ und 4.

118) Eine Gesellschaft von 40 Personen besteht aus Männern, Frauen und Kindern; bezahlte jeder Mann so viel Groschen als Frauen da sind, so kämen 24 Groschen mehr heraus, als wenn jede Frau so viel Groschen bezahlte, als Kinder da sind;

es war aber ein Kind mehr da, als Frauen; wie viel waren Männer, Frauen und Kinder in der Gesellschaft? A. 15 Männer, 12 Frauen, 13 Kinder.

119) Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, welche eine stetige geometrische Proportion bilden; die Summe der ersten und dritten Ziffer ist $2\frac{1}{2}$ mal so groß, als die mittelste; kehrt man die Zahl um, so beträgt sie 297 mehr, als früher; welche Zahl ist es? A. 124.

120) Drei Zahlen stehen in stetiger geometrischer Proportion; ihre Summe ist a, ihr Produkt b? welche Zahlen sind es?

A. $\frac{a - \sqrt[3]{b} \pm \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{b} - 3\sqrt[3]{b^2}}}{2}$,

$\sqrt[3]{b}$ und $\frac{a - \sqrt[3]{b} \mp \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{b} - 3\sqrt[3]{b^2}}}{2}$

121) 3 Personen legen zusammen zu einem Geschäfte, und zwar A gerade so viel, als B und C zusammen; A läßt sein Geld 4 Monate und zieht es dann zurück, und erhält für Einlage und Gewinn 120 Thlr. B, der sein Geld 5 Monate stehen läßt, erhält für Einlage und Gewinn 75 Thlr., C, der sein Geld 6 Monate stehen läßt, erhält 52 Thlr.; wie viel hatte jeder eingesetzt? A. A 100 Thlr., B 60 Thlr., C 40 Thlr.

122) Wenn es in 121 allgemein hieße, daß A, der gerade so viel eingelegt habe, als B und C zusammen, nachdem er sein Geld n Monate habe stehen lassen, b Thlr. erhalten habe, B, welcher es m Monate habe stehen lassen, c Thlr. und C, welcher es l Monate habe stehen lassen, d Thlr., so fragt es sich, wie viel jeder eingelegt habe? Antw.

A hat

$$\frac{(n-m)(dn-bl)+(n-l)(cn-bm)\pm\sqrt{[(n-m)(dn-bl)+(n-l)(cn-bm)]^2+4(n-m)(n-l)(dmn+cln-blm)b}}{2(n-m)(n-l)}$$

B

$$\frac{(m-l)(bm-cn)-(m-n)(cl+dm)\mp\sqrt{[(m-l)(bm-cn)-(m-n)(cl+dm)]^2+4(m-l)(m-n)(blm-cln-dmn)c}}{2(m-l)(m-n)}$$

C

$$\frac{(l-m)(bl-dn)-(l-n)(cl+dm)\mp\sqrt{[(l-m)(bl-dn)-(l-n)(cl+dm)]^2+4(l-n)(l-m)(blm-cln-dmn)d}}{2(l-m)(l-n)}$$

Thaler eingelegt.

123) Vier Zahlen stehen in geometrischer Proportion; die Summe der ersten und zweiten beträgt 20 [a], die Summe der ersten und dritten 21 [b], die Summe der ersten und vierten 18 [c]; welche Zahlen sind es? A. 12, 8, 9, 6 oder $17\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; allgemein

$$\frac{a + b + c \pm \sqrt{(a + b + c)^2 - 8ab}}{4}$$

$$\frac{3a - b - c \mp \sqrt{(a + b + c)^2 - 8ab}}{4}$$

$$\frac{3b - a - c \mp \sqrt{(a + b + c)^2 - 8ab}}{4}$$

$$\frac{3c - a - b \mp \sqrt{(a + b + c)^2 - 8ab}}{4}$$

124) 3 Zahlen sind durch folgende Eigenschaften bestimmt: wenn man je 2 von ihnen mit einander multiplicirt und diese drei Produkte zu einander addirt, so erhält man a [101]; die Summe der Quadrate dieser drei Zahlen ist b [122]; die erste ist um c [4] größer, als die zweite; welche Zahlen sind es? Antw.

$$\frac{\pm 2\sqrt{2a + b} + 3c \pm \sqrt{4(b - a) - 3c^2}}{6}$$

$$\frac{\pm 2\sqrt{2a + b} - 3c \pm \sqrt{4(b - a) - 3c^2}}{6}$$

$$\frac{\pm\sqrt{2a + b} \mp \sqrt{4(b - a) - 3c^2}}{3}$$

Jede Größe hat, je nachdem man die verschiedenen Zeichen nimmt, 4 Werthe. Für das Zahlenbeispiel erhält man folgende 4 Auflösungen: 9, 5, 4, oder 7, 3, 8, oder —3, —7, —8, oder —5, —9, —4.

125) $\sqrt{5 + x} = x - 1$. Welchen Werth muß x erhalten, um dieser Gleichung zu genügen? A. Es ist $x = 4$

oder $= -1$, je nachdem man die Quadraturzel positiv oder negativ nimmt.

126) $2x - \sqrt{9 - x} = \frac{1}{2}(x + 3\frac{1}{4})$. A. Es ist $x = 2\frac{3}{4}$ oder $= -1\frac{1}{36}$.

127) $2x - \sqrt{9 - x} = \frac{1}{2}(x + 1\frac{3}{4})$. A. Es ist $x = 2{,}3077\ldots$ oder $= -1{,}5855\ldots$

128) Man weiß, daß ein Körper in der ersten Sekunde $15\frac{5}{8}$ preuß. Fuße fällt, in den zwei ersten 4 mal so viel, in den 3 ersten 9 mal so viel u. s. w., in den n ersten Sekunden n^2 mal so viel; ferner ist bekannt, daß sich der Schall in jeder Sekunde 1024 Fuße bewegt. Als man von einer bedeutenden Höhe einen Stein herabfallen ließ, hörte man denselben erst nach 15,3 Sekunden aufschlagen; wie hoch war die Höhe? A. 2560 Fuß.

Achtzehntes Kapitel.

Gleichungen des dritten Grades mit einer und mehreren Unbekannten.

1) $5x^2 = \frac{320}{x}$ $\quad x = 4$

$\quad = -2 + \sqrt{-12}$

$\quad = -2 - \sqrt{-12}$

2) $x^3 = 1$ $\quad x = 1$

$\quad \frac{1}{2}[-1 + \sqrt{-3}]$

$\quad \frac{1}{2}[-1 - \sqrt{-3}]$

3) $x^3 = n$ $\quad x = \sqrt[3]{n}$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{n}\,[-1 + \sqrt{-3}]$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{n}\,[-1 - \quad -3]$

4) $x^3 + y^3 = 5103$ $\quad x = 15$ und $y = 12$, oder

$x : y = 5 : 4$ $\quad x = \frac{15}{2}\,[-1 + \sqrt{-3}]$ und

$y = 6\,[-1 + \sqrt{-3}]$

oder $x = \frac{15}{2}\,[-1 - \sqrt{-3}]$ und

$y = 6\,[-1 - \sqrt{-3}]$

5) $(x+1)(x^2 - 1) = x(x - 1) + 2(x^3 - 365)$

$x = 9$ oder $x = \frac{9}{2}\,[-1 + \sqrt{-3}]$ oder

$x = \frac{9}{2}\,[-1 - \sqrt{-3}]$

6) $\frac{x^2}{a} = y$ $\quad x = \sqrt[3]{ab}$ und $y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$ oder

$\frac{b}{y} = x$ $\quad x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{ab}\,[-1 + \sqrt{-3}]$,

$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\,(-1 + \sqrt{-3})$

oder $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{ab}\,[-1 - \sqrt{-3}]$,

$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\,(-1 - \sqrt{-3})$

7) Von welcher Zahl ist das Produkt des Quadrates und der Hälfte gleich 4? A. Von 2.*)

8) Von welcher Zahl ist das Produkt des Quadrates und des Quadrates ihres achten Theiles gleich der Zahl selbst? A. Von 4.

---

*) Die beiden imaginären Wurzeln sollen bei den folgenden reinen cubischen Gleichungen immer weggelassen werden, da sie sich leicht aus der reellen Wurzel ergeben.

9) Ich denke mir eine Zahl, erhebe sie zur 4ten Potenz und dividire diese Potenz durch die Hälfte der Zahl und addire $3\frac{1}{4}$ dazu, so erhalte ich 10; welche Zahl ist es? A. $1\frac{1}{2}$.

10) Ein Führer eines Haufens, welcher nach der Stärke desselben gefragt wurde, gab dieselbe auf folgende Weise an: jeder von uns hat halb so viel Thaler, als wir Leute sind; wenn aber jeder von uns so viel Thaler hätte, als wir alle zusammen haben, so hätten wir zusammen 62500 Thaler; wie viel Personen zählte der Haufen? A. 50.

11) Eine Gesellschaft von mehreren Knaben hatte zusammen so viel Aepfel, daß, wenn sie dieselben in gleichen Theilen unter sich vertheilt hätten, jeder $\frac{1}{4}$ so viel bekommen hätte, als die Anzahl der Knaben betrug; sie begegneten einer andern Gesellschaft von Knaben, welche nur ein Drittheil so stark war, als sie, und gaben einem jeden dieser Knaben $\frac{1}{24}$ von ihrem gesammten Vorrathe, wodurch sie zusammen 162 Aepfel weggaben; wie stark war die erste Gesellschaft? A. 36 Knaben.

12) Jemand wurde nach seinem Gehalte gefragt und sagte: ich habe jetzt jährlich so viel hundert Thaler als ich Jahre im Amte bin; die erste Hälfte meiner Dienstzeit hatte ich aber nur jährlich $\frac{2}{3}$ von meinem jetzigen Einkommen; das, was ich bis jetzt überhaupt erhalten habe, macht gerade so viel aus, als wenn ich mit der Zahl, die meine Dienstjahre angiebt, in 18000 Thlr. dividire; wie viel Gehalt hatte er? A. 600 Thlr.

13) Zu einem Unternehmen sollten Aktien zu 100 Thlr. ausgegeben werden; eine Gesellschaft reicher Kaufleute nahm sämmtliche Actien, vertheilte sie unter ihre Mitglieder zu gleichen Theilen, und es ergab sich, daß jeder halb so viel Actien bekam, als ihrer waren; im ersten Jahre gewannen sie $\frac{1}{7}$ so viel pr., als ihre Anzahl betrug, nämlich 12544 Thlr.; wie viel Kaufleute waren es? A. 56.

14) Jemand hat ein Glas voll Arznei, gießt dieselbe in ein a [$12\frac{1}{2}$] Cubikzoll fassendes Gefäß und ersetzt das noch Feh-

lende mit Wasser; von dieser Mischung nimmt er das Arzneiglas wieder voll und verdünnt dies ebenso, wie vorher; als er nun mit dieser Mischung das Arzneiglas wieder voll füllte, so fand er durch Rechnung, daß in demselben nur b [$\frac{4}{5}$] Cubikzoll Arznei enthalten sein könne; wie viel Cubikzoll faßte daher das Arzneiglas? A. $\sqrt[3]{a^2b}$ [5].

15) Jemand hat ein großes Gefäß voll Arznei, welches a [100] Cubikzoll faßt, und ein kleines Glas; er füllt nun aus dem großen Gefäße das Glas voll und gießt statt der weggenommenen Arznei Wasser zu; von dieser Mischung nimmt er wieder das kleine Glas voll weg und gießt abermals Wasser zu; er nimmt aus dieser Mischung noch einmal das kleine Glas voll und ersetzt den Verlust im Gefäße mit Wasser, findet dann aber durch Rechnung, daß nur b [$51\frac{1}{5}$] Cubikzoll Arznei in dem großen Gefäße enthalten sein könnten; es fragt sich, wie viel Cubikzoll faßte das kleine Glas? A. $a - \sqrt[3]{a^2b}$ [20].

16) Zwei Zahlen sind durch folgende Angaben bestimmt: das Quadrat der ersten Zahl dividirt durch die zweite ist gleich a [18]; das Quadrat der zweiten dividirt durch die erste ist gleich b [$5\frac{1}{3}$]; welche Zahlen sind es? A. $\sqrt[3]{a^2b}$ [12] oder $\sqrt[3]{ab^2}$ [8].

17) Drei Zahlen stehen in stetiger geometrischer Proportion; ihr Produkt ist gleich a [1728], ihre Summe gleich b [37]; welche Zahlen sind es? A. Setzt man $b - \sqrt[3]{a} = A$, so sind die drei Zahlen $\frac{1}{2}[A \pm \sqrt{A^2 - 4\sqrt[3]{a^2}}]$ (16 und 9), $\sqrt[3]{a}$ (12) und $\frac{1}{2}[A \mp \sqrt{A^2 - 4\sqrt[3]{a^2}}]$ (9 oder 16).

18) Jemand, der gefragt wurde, wie viel Meilen er denn gereist sei, antwortet: ich war gerade dreimal so viel Tage unterwegs, als ich täglich Meilen zurücklegte; für jede Meile mußte ich aber so viel Silberpfennige Chausséegeld geben, als ich täglich

Meilen machte; auf der ganzen Reise habe ich sonach 8 Thlr. 10 Sgr. bezahlt; wie viel Meilen war er gereist? A. 300 Meilen.

19) $x^3 - 13x^2 + 52x - 60 = 0$
$x = 2$, oder $= 5$ oder $= 6$

20) $x^3 - 23x^2 + 167x - 385 = 0$
$x = 5$, oder $= 7$, oder $= 11$

21) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
$x = 1$, oder $= -1$, oder $= 3$

22) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$
$x = -2$, oder $= +3$, oder $= -4$

23) $x^3 + 11x^2 + 38x + 40 = 0$
$x = -5$, oder $= -2$, oder $= -4$

24) $x^3 - 43x + 42 = 0$
$x = 1$, oder $= 6$, oder $= -7$

25) $x^3 - 2\frac{7}{12}x^2 + 1\frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0$
$x = 2$, oder $= \frac{1}{3}$, oder $= \frac{1}{4}$

26) $x^3 + 6x + 7 = 0$
$x = -1$. Außerdem hat x noch zwei imaginäre Werthe.

27) $x^3 + 5x + 6 = 0$
$x = -1$ und $x = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{-23}]$ oder $= \frac{1}{2}[1 - \sqrt{-23}]$

28) $x^3 - 9x - 80 = 0$
$x = 5$. Außerdem hat x noch zwei imaginäre Werthe.

29) $x^3 - 24x - 72 = 0$
$x = 6$. Außerdem giebt es noch für x zwei imaginäre Werthe, so wie bei den folgenden Beispielen immer dann, wenn nur ein reeller Werth angegeben ist.

30) $x^3 - 6x - 9 = 0$ $x = 3$

31) $x^3 - 30x - 1368 = 0$ $x = 12$

32) $x^3 - 12x^2 - 2x + 24 = 0$

$x = 12$, oder $= \sqrt{2}$, oder $= -\sqrt{2}$

33) $x^3 - 5x^2 + x - 42 = 0$ $x = 6$

34) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ $x = 1$

35) $x^3 + 7x^2 - 173x + 30 = 0$

$x = 10$, oder $= \frac{1}{2}[-17 + \sqrt{301}] = 0{,}17467..$

oder $= \frac{1}{2}[-17 - \sqrt{301}] = -17{,}17467..$

36) $x^3 - 6x + 11 = 0$ $x = -3{,}091605..$

37) $x^3 - 8x - 85 = 0$ $x = 5$

38) $x^3 - 2x - 2 = 0$ $x = 1{,}769293..$

39) $x^3 - \frac{3x}{2} + 3 = 0$ $x = 1{,}783769..$

40) Die Summe zweier Zahlen beträgt 12; erhebt man aber die größere zum Quadrate und dividirt dieses Quadrat durch die kleinere, so erhält man 14 weniger, als wenn man den Unterschied der beiden Zahlen zum Quadrat erhebt; welche Zahlen sind es? A. 10 und 2.

41) Der Unterschied zweier Zahlen beträgt 5; multiplicirt man aber ihre Summe mit ihrem Produkte, so erhält man 264; welche Zahlen sind es? A. 8 und 3.

42) Die Summe zweier Zahlen beträgt 5; multiplicirt man aber ihren Unterschied mit ihrem Produkte, so erhält man 9; welche Zahlen sind es? A. $4\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Außerdem genügen auch folgende Zahlen den Bedingungen der Aufgabe:

$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ und $\frac{7 - \sqrt{13}}{2}$, und ebenso

$\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ und $\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$

43) Zwei Zahlen sind um 9 von einander verschieden; wenn man die Differenz der Cuben dieser Zahlen mit der Summe

der Zahlen multiplicirt, so erhält man 351 mal so viel, als wenn man ihre Quadrate von einander subtrahirt, welche Zahlen sind es? A. 15 und 6, oder $4\frac{1}{2}$ und $-4\frac{1}{2}$, oder -6 und -15.

44) Die eine von drei Zahlen ist dreimal so groß, als die andere; die Summe der Cuben dieser Zahlen ist aber um 176 größer, als die Zahl, welche man erhält, wenn man zur Summe der Quadrate dieser Zahlen die Summe der Zahlen selbst addirt; welche Zahlen sind es? A. 6 und 2.

45) Wenn man von zwei Zahlen, welche um 4 von einander verschieden sind, die vierten Potenzen von einander subtrahirt, so erhält man 5936, welche Zahlen sind es? A. 9 und 5.

46) Zwei Zahlen sind durch folgende Bedingungen bestimmt: die größere ist um 31 größer, als das Quadrat der kleinen; wenn man aber die kleinere von 10 subtrahirt und diese Differenz mit der größeren multiplicirt, so erhält man 280; welche Zahlen sind es? A. 2 und 35, oder 3 und 40, oder 5 und 56.

47) Zwei Zahlen sind durch folgende Bedingungen bestimmt: die kleinere ist um 14 kleiner, als die größere; subtrahirt man aber von der größeren 7 und multiplicirt diese Differenz mit dem Quadrate der größeren, so erhält man die Summe beider Zahlen; welche Zahlen sind es? A. -7 und 7, oder $-14+\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$, oder $-14-\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

48) Drei Zahlen sind durch folgende Bedingungen bestimmt: die mittelste ist um 1 kleiner, als das Sechsfache der kleinsten; wenn man das Achtfache der mittelsten von der größten subtrahirt und diese Differenz mit der kleinsten multiplicirt, so erhält man 210; die um 99 verminderte größte Zahl verhält sich aber geometrisch zu der um 181 vermehrten mittelsten Zahl, wie die kleinste zu 6. Welche Zahlen sind es? A. 5, 29 und 274, oder 6, 35 und 315, oder 7, 41 und 358.

49) Drei Zahlen sind durch folgende Bedingungen bestimmt: wenn man die mittelste mit der um 3 größeren Zahl multiplicirt

und von diesem Producte die größte subtrahirt, so erhält man eben so viel, als wenn man mit der kleinsten in 42 dividirt; das Sechstel der Differenz der größten und mittelsten Zahl ist um 1 kleiner, als das Vierfache der kleinsten; wenn man aber von der größten 24 subtrahirt, so erhält man 5 mal so viel, als wenn man die mittelste von dem Sechsfachen der kleinsten subtrahirt; welche Zahlen sind es? A. 2, 7 und 49, oder 3, 8 und 74, oder 7, 12 und 174.

50) Jemand wurde gefragt, wie alt er sei, und antwortete: wenn ich in 7 Jahren die Zahl, welche die Anzahl meiner Jahre angiebt, quadrire, so erhalte ich noch 98 mehr, als wenn ich vor 7 Jahren die Zahl, welche damals die Anzahl meiner Jahre angab, zur dritten Potenz erhoben hätte? wie alt war er? A. 14 Jahre alt.

51) Eine Anzahl Personen fangen gemeinschaftlich ein Geschäft an, und zwar giebt jeder 20 mal so viel Thaler, als ihrer sind; sie hoffen damit 2 Procent mehr, als ihrer sind, zu gewinnen, und wurden auch in ihrer Erwartung nicht getäuscht, denn der Gewinn betrug 128 Thlr.; wie viel waren es Kaufleute? A. 8.

52) Einige Kaufleute haben zusammen 8520 Thlr. Hierzu legt ein jeder noch 120 mal so viel Thlr., als Kaufleute sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie halb so viel Procente, als Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinnst und ein jeder nimmt 9 mal so viel Thlr., als Personen sind; es bleiben dann noch von dem Gewinnste 63 Thlr. übrig; wie viel Kaufleute sind es gewesen? A. Entweder 3, oder 5, oder 7.

53) Ein Wasserbehälter ist 2 Fuß länger, als breit, und einen Fuß breiter, als hoch; wenn er voll gefüllt ist, so faßt er 140 Cubikfuß; wie breit ist er? A. 5 Fuß.

53) Jemand verspricht seinen Arbeitern für Urbarmachung eines Stück Landes, welches die Form eines Rechtecks hatte, für jede Quadratruthe 2 Silbergroschen mehr, als die Länge des Fel=

des beträgt; das Feld war aber 7 Ruthen länger, als breit, und er mußte für die Arbeit 132 Thlr. bezahlen; wie lang war das Feld? A. 18 Ruthen.

55) Jemand hat Steine, deren Länge 3 Zoll mehr, als die Breite, und deren Höhe 4 Zoll weniger als die Breite beträgt; dann hat er noch eine andere Art Steine, welche 1 Zoll länger, 1 Zoll höher, aber 2 Zoll weniger breit sind, als die erste Art; er weiß, daß 22 Steine der ersteren Sorte so viel Raum einnehmen, als 21 Steine der zweiten; wie groß ist die Länge, Breite und Höhe der beiden Sorten Steine? A. Ein Stein der ersteren Sorte ist 10 Zoll lang, 7 Zoll breit und 3 Zoll hoch; ein Stein der zweiten Sorte ist 11 Zoll lang, 5 Zoll breit und 4 Zoll hoch.

56) Das Product der Ziffern einer zweizifferigen Zahl ist um 22 kleiner, als die zweizifferige Zahl selbst, das Quadrat der Zahl, welche die Zehner bedeutet, ist um 18 größer, als die Zahl, welche die Einer bedeutet; welche Zahl ist es? A. 57.

57) Der Führer eines Bataillons fand, daß er seine Mannschaft am besten eintheile, wenn er jedem der wenigen Officiers, die er noch hatte, 8 Unterofficiers mehr, als Officiers da waren, zutheile, jedem Unterofficier aber 9 Gemeine mehr, als Unterofficiers bei einem Officier waren, unter den Befehl gäbe; das Bataillon war aber den Führer selbst mitgerechnet 697 Mann stark; wie viel zählte es Officiers, Unterofficiers und Gemeine? Antw. 3 Officiers, 33 Unterofficiers und 660 Gemeine.

58) In welchem Zahlensysteme bedeutet 3512 so viel, als im Zehnzahlensysteme 1283 bedeutet? A. Im Zahlensysteme dessen Basis 7 ist.

59) In welchem Zahlensysteme würde das Product von 315 und 22 gleich 7041 sein? A. Im Zahlensysteme, dessen Basis 9 ist.

60) Jemand giebt die Zahl, die er sich gedacht, auf folgende Art an: wenn ich von der Zahl selbst 1 subtrahire und

ebenso von dem Doppelten der Zahl 1 subtrahire, diese beiden Differenzen mit einander multiplicire und dieses Produkt von dem Cubus der gedachten Zahl subtrahire, so erhalte ich 12 mal weniger, als wenn ich die gedachte Zahl mit dem um 1 vermehrten Achtfachen ihres Quadrates multiplicire; welche Zahl hatte er sich gedacht? A. Es können drei Zahlen sein: 4, oder $1\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{2}$.

61) Wenn, sagt Einer aus einer Gesellschaft, jeder von uns halb so viel Thaler bekäme, als unsere Anzahl beträgt, so hätten wir alle zusammen gerade eben so viel, als jeder bekäme, wenn sich die anderen außer mir in 90 Thaler theilten; aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft? A. Aus 6 Personen.

62) Ein Vater, welcher eine Tochter mehr hat, als Söhne, bestimmt, daß jede Tochter so viel mal tausend Thaler bekommen soll, als er Söhne hat, in den Rest seines Vermögens sollten sich dann die Söhne zu gleichen Theilen theilen; er hinterläßt nun nach seinem Tode 10000 Thlr. und es findet sich, daß die Töchter zusammen 4000 Thlr. mehr bekommen, als ein Sohn; wie viel hatte er Söhne und Töchter? A. 2 Söhne und 3 Töchter.

63) Eine Anzahl Leute sollte sich in 360 Thlr. theilen; Einer von ihnen spricht: wären wir zwei weniger, so bekäme jeder von uns $1\frac{1}{2}$ mal so viel Thaler, als wir Personen sind, mehr, als wenn wir zwei mehr wären; wie viel Leute waren es? Antw. 10.

64) In einer Schulanstalt wurden zu Ende jedes Jahres unter die Fleißigsten 240 Thlr. vertheilt; ein Schüler, welcher dreimal eine Prämie erhalten hatte, sagte: das zweitemal waren wir, die wir uns in die 240 Thlr. theilten, 4 mehr, und das drittemal 7 mehr, als das erstemal; ich habe daher auch das erstemal nur 6 Thlr. weniger erhalten, als das zweite- und drittemal zusammen; wie viel Schüler erhielten also das erstemal die Prämie? A. 8.

65) Jemand hatte jährlich 50 Thlr. zu einer Reise bestimmt. Das erste Jahr reiste er allein; das zweite Jahr reiste

er mit seiner Frau und kürzte deshalb, um nicht mehr ausgeben zu müssen, die Reise um 10 Tage ab; das dritte Jahr nahm er seine ganze Familie mit und kürzte deshalb die Reise noch um 10 Tage ab, denn er hatte berechnet, daß er dann täglich immer noch $\frac{5}{6}$ Thlr. mehr ausgeben könne, als die tägliche Ausgabe beim ersten und zweiten Jahre zusammen betrug. Wie viel Tage war er das erste Jahr unterweges? A. 30 Tage.

Neunzehntes Kapitel.

Unbestimmte Aufgaben.

1) Welches sind die ganzen Zahlen, in denen 3 und 4 aufgehen? A. 12, 24, 36 u. s. w., im Allgemeinen 12 n.

2) In welchen Zahlen geht 6 und 9 auf? A. In 18, 36, 54 u. s. w., in 18 n.

3) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß sie durch 7 theilbar sind und durch 5 dividirt 3 übrig lassen, außerdem aber zwischen 200 und 500 liegen? A. 203, 238, 273, 308, 343, 378, 413, 448, 483.

4) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß sie durch 11 aufgehen und durch 6 dividirt 5 übrig lassen? A. 11, 77, 143, 209 u. s. w., im Allgemeinen $11[6\,m - 5]$ oder $11(6\,m + 1)$.

5) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß sie durch 3 dividirt 2, durch 4 dividirt 3 übrig lassen? A. 11, 23, 35, 47 u. s. w., im Allgemeinen $12\,q - 1$ oder $12\,q + 11$.

6) Welche Zahlen verbinden mit der in 4) angegebenen Eigenschaft auch noch die, daß sie durch 5 dividirt 1 übrig lassen? A. 11, 341, 671, 1001 u. s. w., im Allgemeinen $11(30\,n + 1)$

7) Welche Zahlen verbinden mit der in 5) angegebenen Eigenschaft noch die, daß sie durch 5 dividirt 4 übrig lassen? A. 59, 119, 179 u. s. w., im Allgemeinen $60n - 1$ oder $60n + 59$.

8) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß sie durch 11 theilbar sind, durch 3 dividirt 2 und durch 4 dividirt 1 zum Reste lassen? A. 77, 209, 341 u. s. w., im Allgemeinen $11(12n + 7)$.

9) Welche Zahlen gehen durch 7 auf, lassen durch 2 dividirt 1 und durch 11 dividirt 9 zum Reste? A. 119, 273, 427 u. s. w., im Allgemeinen $7(22n + 17)$.

10) Welche Zahlen lassen durch 4 dividirt 3 zum Reste und durch 6 dividirt 2? A. Es giebt keine Zahl, welche diese Eigenschaft hat; warum nicht?

11) Welche Zahlen lassen durch 7 dividirt 5 und durch 5 dividirt 2 übrig? A. 12, 47, 82, 117, 152, 187, 222, 257, 292, 327, 362, 397, im Allgemeinen $35n + 12$.

12) Welche Zahlen verbinden damit noch die Eigenschaft, daß sie durch 8 dividirt 1 übrig lassen? A. 257, 537, 817 u. s. w., im Allgemeinen $280n + 257$.

13) Welche Zahlen endlich verbinden damit auch noch die Eigenschaft, daß sie durch 3 dividirt 1 übrig lassen? A. 817, 1657, 2497, im Allgemeinen $840n + 817$.

14) Welche 2 Zahlen haben die Eigenschaft, daß das Siebenfache der einen von dem Vierfachen der andern subtrahirt 19 giebt? Antw.

Die eine Zahl ist 10, 17, 24, 31 . . . . . $3 + 7q$
die andere ist 3, 7, 11, 15 . . . . . $4q - 1$

15) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß das Neunfache der einen zu dem Dreizehnfachen der andern addirt, 1000 giebt? Antw.

Die eine Zahl ist	101,	88,	75,	62,	49,	36,	23,	10,
die andere ist	7,	16,	25,	34,	43,	52,	61,	70

16) 144 soll in zwei solche Theile zerlegt werden, daß der eine durch 5 dividirt 3, der andere durch 7 dividirt 2 übrig läßt. Welches sind die Theile? A. 128 und 16, 93 und 51, 58 und 86, 23 und 121.

17) 500 soll in zwei Theile zerlegt werden, so daß der eine ein Produkt von 13 ist, der andere aber durch 5 dividirt 3 zum Reste läßt? welches sind die Theile? A. 52 und 448, 117 und 383, 182 und 318, 247 und 253, 312 und 188, 377 und 123, 442 und 58.

18) Die 1200 soll in zwei solche Theile getheilt werden, daß der eine durch 5 dividirt 2, der andere durch 13 dividirt 12 übrig läßt; welches sind die Theile? A. 57 und 1143, 122 und 1078, 187 und 1013, 252 und 948, 317 und 883, 382 und 818, 447 und 753, 512 und 688, 577 und 623, 642 und 558, 707 und 493, 772 und 428, 837 und 363, 902 und 298, 967 und 233, 1032 und 168, 1097 und 103, 1162 und 38.

19) 1839 soll in zwei solche Theile getheilt werden, daß der eine durch 7, der andere durch 11 theilbar ist; welches sind die Theile? A. 1806 und 33, 1729 und 110, 1652 und 187, 1575 und 264 und so fort, indem der eine Theil immer um 77 abnimmt, während der andere um 77 zunimmt, so daß man zuletzt 35 und 1804 als die beiden Theile erhält.

20) Zähle ich, sagt Jemand, die Thaler, welche ich habe, nach 4, so bleiben mir 3 übrig; zähle ich sie aber nach 5, so bleiben 4 übrig; jedoch weiß ich, daß ich nicht unter 60 und nicht über 120 habe; wie viel Thaler hatte er? Antw. 79 oder 99 oder 119.

21) Jemand wechselt 5 Sgr. in $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ Silbergroschen-Stücken ein; wie viel bekommt er von jeder Münzsorte? Antw.

$\frac{1}{4}$ Sgr.-Stücke 4, 8, 12, 16.
$\frac{1}{3}$ Sgr.-Stücke 12, 9, 6, 3.

22) Jemand will von einem Wechsler 1000 Thlr. Courant in Dukaten und Friedrichsd'or umwechseln; die Dukaten standen $3\frac{1}{6}$ Thlr., die Friedrichsd'or $5\frac{2}{3}$ Thlr.; wie viel bekommt er von jeder Münzsorte? A. 48 Dukaten und 150 Friedrichsd'or oder 184 Dukaten und 75 Friedrichsd'or.

23) Zwei Zahlen, von denen die eine durch 9 theilbar ist, die andere aber durch 5 dividirt 4 übrig läßt, haben zur Differenz 46; welche Zahlen sind es? A. Soll die durch 9 theilbare der Minuendus sein, so erhält man folgende 2 Reihen von Zahlen:

90, 135, 180, 225 u. s. w. . . 45n
44, 89, 134, 179 u. s. w. . . 45n—46;

soll aber die durch 9 theilbare der Subtrahendus sein, so erhält man folgende 2 Reihen von Zahlen:

18, 63, 108, 153 u. s. w. . . . 45n+18
64, 109, 154, 199 u. s. w. . . . 45n+64

24) Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß das Fünffache der einen zum Siebenfachen der andern addirt, die Summe beider Zahlen selbst um 100 übertrifft? A. 1 und 16, 4 und 14, 7 und 12, 10 und 10, 13 und 8, 16 und 6, 19 und 4, 22 und 2.

25) 360 soll in 2 solche Theile getheilt werden, daß der eine zur letzten Ziffer rechts eine 3 hat, der andere aber durch 7 aufgeht; welches sind diese Theile? A. 3 und 357, 73 und 287, 143 und 217, 213 und 147, 283 und 77, 353 und 7.

26) Jemand will für 400 Thlr. Louisd'or à $5\frac{2}{3}$ Thlr. und Dukaten à $3\frac{1}{6}$ Thlr. einwechseln; wie viel von jeder Sorte bekommt er? A. 8 Louisd'or und 112 Dukaten, oder 27 L. und 78 D., oder 46 L. und 44 D., oder 65 L. und 10 D.

27) In 2000 Thlr. sollen sich Männer und Frauen theilen und zwar soll jeder Mann 19, jede Frau 13 Thlr. bekommen; auf wie vielerlei Art kann dies geschehen? Antw.

Anzahl der Männer	4,	17,	30,	43,	56,	69,	82	95.
Anzahl der Frauen	148,	129,	110,	91,	72,	53,	34,	15.

28) In einem Wirthshause bezahlte eine Gesellschaft von Männern und Frauen zusammen 9 Thlr. 23 Sgr., und zwar jeder Mann 15, jede Frau 13 Sgr.; aus wie Männern und Frauen bestand die Gesellschaft? A. Die Gesellschaft bestand aus 10 Männern und 11 Frauen.

29) Jemand hatte eine Anzahl Thaler: wenn er sie nach Würfen von 13 zählen wollte, so blieben ihm 11 übrig; er gab nun 70 Thlr. weg und versuchte den Rest nach Würfen von 12 zu zählen, sah aber, daß ihm so 7 übrig blieben; wie viel Thaler hatte er? A. 89, oder 245, oder 401, oder allgemein 156 n + 89.

30) Ich habe, sagt Jemand, so viel Aepfel, daß, wenn ich sie nach Schocken oder Mandeln zähle, mir zuletzt immer vier fehlen; wenn ich sie aber nach 100 zähle, so bleiben mir 36 übrig; wie viel Aepfel hatte er? A. 236, oder 536, oder 836, allgemein 300 n + 236.

31) Jemand giebt den Ertrag seiner Aerndte in Roggen und Weizen so an: wenn ich den Scheffel Roggen mit $1\frac{1}{3}$ Thlr. und den Scheffel Weizen mit 2 Thlr. verkaufe, so löse ich 20 Thlr. mehr, als wenn ich den Scheffel Roggen mit $1\frac{2}{3}$ Thlr. den Scheffel Weizen aber mit $1\frac{5}{6}$ Thlr. verkaufte. Kann man aus dieser Angabe den Ertrag der Aerndte bestimmen? A. Nein; man weiß nur, daß er 120 Scheffel mehr Weizen als Roggen ärndtete, also z. B. 40 Scheffel Roggen und 160 Scheffel Weizen oder 900 Scheffel Roggen und 1020 Scheffel Weizen u. s. w.

32) A reist von M nach N und zwar täglich 6 Meilen, B von N nach M und zwar täglich $8\frac{1}{2}$ Meile; sie wissen nicht, ob sie an einem und demselben Tage abgereist sind, treffen sich aber zu Ende eines Tages, als jeder gerade seine Tagreise zurückgelegt hatte, und es fand sich, daß A 30 Meilen weniger zurückgelegt hatte, als B. Wie viel Tage war jener unterweges und wie weit waren die beiden Orte von einander entfernt? Antw.

A 12, 29, 46, im Allgemeinen 17 n — 5 Tage,
B 12, 24, 36, „ „ 12 n Tage;
Entfernung 174, 378, 582, im Allgemeinen 204 n — 30 Meilen.

33) Ein Compagnieführer erzählte, daß er vor einer Schlacht seine Leute gerade hätte 5 Mann hoch aufstellen können; nach der Schlacht aber, in der er 13 Mann verloren habe, hätte ihm, als er die Compagnie habe 7 Mann hoch aufstellen wollen, 1 Mann gefehlt; auch erinnerte er sich, daß er vor der Schlacht mehr als 140, nach der Schlacht aber weniger als 140 Mann gehabt habe; wie viel Mann hatte er vor der Schlacht? A. 145 M.

34) Welche drei Zahlen haben folgende Eigenschaften: ihre Summe beträgt 300; multiplicirt man die erste mit 2, die zweite mit 3 und die dritte mit 4 und addirt diese drei Produkte, so erhält man 1000. Antw.

erste Zahl	99	98	97	96	95	94	… n …	6	5	4	3	2	1
zweite Zahl	2	4	6	8	10	12	…200—2 …	188	190	192	194	196	198
dritte Zahl	199	198	197	196	195	194	… 100 + n …	106	105	104	103	102	101

35) Die Zahl 1002 soll in 3 Theile getheilt werden, von denen der erste durch 3, der zweite durch 4, der dritte durch 5 theilbar ist; außerdem aber soll die zweite Zahl die mittlere arithmetische Proportionale zu den beiden andern sein; welches sind die Theile? A. 663, 334 und 5; 648, 334 und 20; 633, 334 und 35 u. s. w., indem die mittelste Zahl immer dieselbe bleibt, die erste um 15 ab-, die dritte 15 zunimmt.

36) Jemand will für einen Thlr. Silberdreier, Silbervierpfenniger und Silbersechser einwechseln, so jedoch, daß er 100 Geldstücke bekomme; wie viel bekommt er von jeder Münzsorte? Antw.

Dreier	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
Vierpf	57	54	51	48	45	42	39	36	33	30	27	24
Sechser	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Dreier	66	68	70	72	74	76	78
Vierpf.	21	18	15	12	9	6	3
Sechser	13	14	15	16	17	18	19

37) Jemand will für 20 Thlr. $\frac{1}{12}$ Thaler-Stücke, Silbergroschen und $\frac{1}{48}$ Thaler-Stücke ein-

wechseln, und zwar so, daß die Anzahl der $\frac{1}{12}$ Thaler-Stücke so groß ist, als die Anzahl der Silbergroschen und $\frac{1}{48}$ Thaler-Stücke zusammen; auf welche Weise ist dies möglich?

$\frac{1}{12}$ Thaler-Stücke	189	186	183	180	177	174
Silbergroschen	25	50	75	100	125	150
$\frac{1}{48}$ Thaler-Stücke	164	136	108	80	52	24

38) 60 Personen, Männer, Frauen und Kinder, bezahlten zusammen 20 Thlr. 1 Sgr., und zwar jeder Mann 15, jede Frau 12 und jedes Kind 7 Sgr.; wie viel waren es Männer Frauen und Kinder? Antw.

Männer	2	7	12	17	22
Frauen	33	25	17	9	1
Kinder	25	28	31	34	37

39) Jemand kauft für 5 Thlr. 13 Sgr. Aepfel, Birnen und Pflaumen, und zwar 4000 Stück. 12 Pflaumen kaufte er für 5 Spf., 1 Apfel für 1 Spf. und 3 Birnen für 4 Spf.; wie viel bekam er von jeder Sorte? Antw.

Birnen	7	14	21	28	...7 n........	301
Aepfel	485	474	463	452	...496 — 11 n...	23
Pflaum.	3508	3512	3516	3520	...3504 + 4 n...	3676

Birnen	308	315
Aepfel	12	1
Pflaumen	3680	3684

40) Man will ein Faß Wein, welches 200 Quart enthält, auf 4 Quart-, 5 Quart- und 8 Quart-Flaschen füllen, jedoch so, daß man zusammen gerade 32 Flaschen braucht; auf wie vielerlei Art kann dies geschehen? Antw.

4 Quart-Fl.	2	5	8	11
5 Quart-Fl.	16	12	8	4
8 Quart-Fl.	14	15	16	17

41) Die Zahl 100 soll in drei Theile getheilt werden, die die Eigenschaft haben, daß, wenn man den ersten mit 3 multiplicirt und dann durch 4 dividirt, den zweiten mit 4 multiplicirt und dann durch 5 dividirt, den dritten mit 5 multiplicirt und dann durch 3 dividirt, die Summe dieser drei Größen ebenfalls 100 ist? Antw. Die Theile sind 16, 60 und 24, oder 68, 5 und 27.

42) Ein Goldarbeiter hat dreierlei Silber; das erste ist 12löthig, das zweite 11löthig, das dritte 9½löthig; nun braucht er zu einer Arbeit 50 Mark 10½löthiges Silber; wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen? Antw.

Vom 12löthigen	2*)	5	8	11	14	17
11löthigen	30	25	20	15	10	5
9½löthigen	18	20	22	24	26	28

43) Jemand hat 700 Stück theils Pferde, theils Ochsen theils Schweine, theils Schafe; er berechnet sich, daß, wenn er ein Pferd mit 75 Thlr., einen Ochsen mit 40 Thlr., ein Schwein mit 12 Thlr., ein Schaf mit 3 Thlr. verkauft, er 16650 Thlr. lösen werde; ehe er das Vieh verkauft, hat er das Unglück, daß ihm 10 Pferde, 15 Ochsen, 20 Schweine und 30 Schafe fallen; um nun nicht zu viel einzubüßen, schlägt er mit dem Preise auf, und fordert für ein Pferd 78 Thlr., für einen Ochsen 42 Thlr., für ein Schwein 13 Thlr., für ein Schaf 3½ Thlr., findet aber, daß er bei diesem Preise immer noch 850 Thlr. weniger einnehmen werde, als früher; wie viel hatte er anfangs?

*) Es wird hier vorausgesetzt, daß er nur ganze Mark von allen drei Sorten nehmen will; wären auch Bruchtheile gestattet, so gäbe es unendlich viele Auflösungen.

Pferde	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Ochsen	285	258	231	204	177	150	123	96	69
Schweine	45	76	107	138	169	200	231	262	293
Schafe	320	306	292	278	264	250	236	222	208

Pferde	140	150 *)
Ochsen	42	15
Schweine	324	355
Schafe	194	180

44) Die Zahl 100 soll in drei solche Theile getheilt werden, daß der eine durch 5, der andere durch 3 und der dritte durch 7 theilbar ist; welches sind die Theile? Antw.

5	5	5	5	10	. . . . $5x$	70	75	80	90
81	60	39	18	48	..$3[31+3x-7p$..	9	18	6	3
14	35	56	77	42	..$7(1-2x+3p)$..	21	7	14	7

wo für x die Zahlen von 1 — 18 gesetzt werden können, p aber immer $> \frac{2x-1}{3}$ und $< \frac{3x+31}{7}$ sein muß.

45) 100 soll in drei solche gleiche Theile getheilt werden, daß der eine durch 11 dividirt 1, der zweite durch 13 dividirt 2, der dritte durch 17 dividirt 3 übrig läßt; welches sind die Theile? A.: 1, 28, 71.

46) Es sollen 430 Ctr. durch drei Wagen, von denen der eine mit 19, der andere mit 23, der dritte mit 29 Ctrn. befrachtet werden kann, fortgefahren werden, jedoch so, daß jeder Wagen immer vollkommen befrachtet ist; auf wie vielerlei Art kann dies geschehen? Antw.

Der erste führt	12 mal,	5 mal,	8 mal.
Der zweite führt	5 mal,	7 mal,	2 mal.
Der dritte führt	3 mal,	6 mal,	8 mal.

---

*) Im letzten Falle würden ihm alle Ochsen gefallen sein.

47) Eine Gesellschaft von 20 Personen, Männer, Frauen, Knaben und Mädchen, hatten in einem Wirthshause 2 Thlr. zu bezahlen; sie berechneten, daß, wenn ein Mann 6 Sgr., eine Frau 4 Sgr., eine Knabe $2\frac{1}{2}$ Sgr., ein Mädchen 2 Sgr. gäbe, die Rechnung gerade bezahlt werden könne; aus wie viel Männern, Frauen, Knaben und Mädchen bestand die Gesellschaft? Antwort:

Männer	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
Frauen	5	6	7	3	4	5	1	2	3	1
Knaben	12	8	4	12	8	4	12	8	4	4
Mädchen	2	5	8	3	6	9	4	7	10	11

Wenn man noch wüßte, daß es eben so viel Frauen als Männer gewesen wären, würde dann die Aufgabe noch unbestimmt sein?

48) Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, daß ihre Summe zu ihrem Produkte addirt gleich 101 ist? A. 1 und 50, 2 und 33, 5 und 16.

49) Wie zerlegt man den Bruch $\frac{91}{10}$ in zwei Brüche, deren Nenner 2 und 5 sind? A. In $\frac{1}{2}$ und $\frac{43}{5}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{38}{5}$, $\frac{5}{2}$ und $\frac{33}{5}$, ... $\frac{2n+1}{2}$ und $\frac{43-5n}{5}$ ..; in $\frac{17}{2}$ und $\frac{3}{5}$.

50) Man soll zwei Brüche mit den Nennern 2 und 5 finden, so daß der Bruch mit dem Nenner 2 um $\frac{91}{10}$ größer ist, als der Bruch mit dem Nenner 5; welche Brüche sind es? A. $\frac{19}{2}$ und $\frac{2}{5}$, $\frac{21}{2}$ und $\frac{7}{5}$, $\frac{23}{2}$ und $\frac{12}{5}$ u. s. w.; im Allgemeinen $\frac{2n+1}{2}$ und $\frac{5n-43}{5}$, wo $n > 8$ sein muß.

51) Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt ihre Summe um so viel übertrifft, als ihre Differenz beträgt. A. Die Zahl, welche bei der Differenz Subtrahendus wird, ist 2; die andere Zahl ist beliebig.

Zwanzigstes Kapitel.

Progressionen, arithmetische Reihen höherer Ordnung, zusammengesetzte Zins- und Rentenrechnung.

I. Arithmetische Progressionen.

Die beiden Hauptformen für die arithmetischen Progressionen: $u = a + (n - 1) d$ und $s = \frac{(a + u) n}{2}$, wo a das erste, u das letzte Glied, d die Differenz, n die Anzahl und s die Summe der Glieder bedeutet, enthalten 5 Größen, von denen eine durch drei der andern ausgedrückt wird. Die Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten lehrt, wie je zwei dieser 5 Größen durch die drei andern bestimmt werden können. Die sich daraus ergebenden 20 Formeln finden sich in den meisten Lehrbüchern; nach denselben oder auch unabhängig von denselben vermittelst obiger beiden Formeln sind folgende Aufgaben leicht zu lösen:

1) $a = 7$, $d = 5$, $n = 8$, wie groß ist u? A. 42.
2) $a = 3$, $d = 4$, $s = 595$, wie groß ist u? A. 67.*)
3) $a = -5$, $n = 20$, $s = 1550$, wie groß ist u? A. 160.
4) $d = 3\frac{1}{3}$, $n = 10$, $s = 180$, wie groß ist u? A. 33.
5) $a = 1\frac{1}{2}$, $d = 4$, $n = 16$, wie groß ist s? A. 504.

---

*) Die Gleichung giebt hier auch noch den Werth -71, welchen Werth jedoch, da $a = 3$ und wegen $d = 4$ die Progression eine aufsteigende ist, u nicht annehmen kann.

6) $a = 6$, $d = -3\frac{1}{2}$, $u = -43$, wie groß ist s? A. $-277\frac{1}{2}$.

7) $a = -12$, $n = 8$, $u = 13$, wie groß ist s? A. 4.

8) $d = 5$, $n = 9$, $u = 28$, wie groß ist s? A. 72.

9) $a = 9$, $n = 19$, $u = 6$, wie groß ist d? A. $-\frac{1}{6}$.

10) $a = 5$, $n = 12$, $s = 120\frac{1}{2}$, wie groß ist d? A. $\frac{11}{12}$.

11) $a = \frac{2}{3}$, $u = 7\frac{1}{3}$, $s = 36$, wie groß ist d? A. $\frac{5}{6}$.

12) $n = 21$, $u = 14$, $s = 364$, wie groß ist d? A. $-\frac{1}{3}$.

13) $a = 35$, $d = 4\frac{1}{2}$, $u = 89$, wie groß ist n? A. 13.

14) $a = -5$, $d = \frac{3}{4}$, $s = 17$, wie groß ist n? A. 17.

15) $a = \frac{1}{2}$, $u = 7$, $s = 45$, wie groß ist n? A. 12.

16) $d = 5$, $u = 102\frac{1}{2}$, $s = 1092\frac{1}{2}$, wie groß ist n? A. 19 oder 23.*)

17) $d = 3\frac{1}{4}$, $n = 7$, $u = 10$, wie groß ist a? A. $-9\frac{1}{2}$.

18) $d = -1$, $n = 39$, $s = 1$, wie groß ist a? A. $19\frac{1}{39}$.

19) $d = 2$, $u = 10$, $s = 0$, wie groß ist a? A. -10.

20) $n = 9$, $u = -100$, $s = -4\frac{1}{2}$, wie groß ist a? A. 99.

21) Wenn $d = 3$, $u = 34$ und $s = 205$ ist, welchen Werth haben a und n? A. $a = 7$, $n = 10$.

22) Wenn $a = 1\frac{1}{2}$, $u = 8\frac{5}{6}$ und $s = 62$ ist, wie groß ist d und n? A. $d = \frac{2}{3}$, $n = 12$.

23) Wenn $a = 5$, $n = 26$, und $s = 2405$ ist, wie groß ist d und u? A. $d = 7$, $u = 180$.

24) Wenn $d = 4$, $n = 17$ und $s = 799$ ist, wie groß ist a und u? A. $a = 15$ und $u = 79$.

25) Wenn $a = 6$, $n = 21$ und $s = 1520$ ist, wie groß ist d und u? A. $d = 6\frac{67}{105}$ und $u - 138\frac{16}{21}$.

---

*) Es giebt also zwei Progressionen, deren Differenz 5, deren letztes Glied $102\frac{1}{2}$ und deren Summe $1092\frac{1}{2}$ ist; die Anzahl der Glieder ist in der einen 19, in der andern 23; das erste Glied a ist natürlich in beiden verschieden.

26) Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis 100, die aller ungeraden von 1 bis 99, und aller Zahlen von 1 bis 100? A. Alle geraden Zahlen betragen zusammen 2550, alle ungeraden 2500, alle Zahlen 5050.

27) Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis 500? A. 125250.

28) Ein Körper fällt in einer Sekunde $15\frac{5}{8}$ Fuß und in jeder folgenden Sekunde $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr, als in der vorhergehenden, wie viel fällt er in der 12ten Sekunde und wie viel überhaupt in 12 Sekunden? A. In der 12ten Sekunde fällt er $359\frac{3}{8}$ Fuß; in 12 Sekunden 2250 Fuß.

29) In welcher Zeit wird ein Körper 4000 Fuß herabfallen? A. In 16 Sekunden.

30) 17 Personen sollen sich in 442 Thlr. so theilen, daß jeder folgende immer 3 Thlr. mehr bekommt, als der vorhergehende; wie viel bekommt der erste und der letzte? A. 2 Thlr. und 50 Thlr.

31) Jemand will seine Schulden von 6500 Thlrn. in 5 Terminen abtragen, und zwar so, daß er in jedem Termine 300 Thlr. mehr bezahlt, als in dem vorhergehenden, wie viel bezahlt er im ersten und im letzten Termine? A. Im ersten 700, im letzten 1900 Thlr.

32) Jemand, der 2500 Thlr. zu bezahlen hat, macht sich verbindlich, im ersten Termine 200 Thlr., und in jedem folgenden immer eine bestimmte Summe mehr, als im vorhergehenden, zu bezahlen; wenn er nun in 5 Terminen die Schulden tilgen will, wie viel muß die jedesmalige Erhöhung betragen? Antw. 150 Thlr.

33) Wenn von 50 Menschen der erste 152 Thlr., jeder folgende aber immer 4 Thlr. mehr bekommen soll, als der vorhergehende, wie viel muß da vertheilt werden? A. 12500 Thlr.

34) Wie viel Personen können sich in 1090 Thlr. theilen,

wenn der erste 7 Thlr., jeder folgende aber 5 Thlr. mehr bekommen soll, als der vorhergehende? A. 20 Personen.

35) Wenn sich Jemand vornähme, in einem Monate von 31 Tagen $15\frac{1}{2}$ Thlr. dadurch zu ersparen, daß er an jedem Tage etwas zurücklegte, und zwar an jedem folgenden ein Bestimmtes mehr, als an dem vorhergehenden, wie viel würde er am ersten und letzten Tage zurücklegen müssen, wenn er am letzten Tage gerade noch einmal so viel, als am ersten, zurücklegen wollte? A. Am ersten 10 Sgr., am letzten 20 Sgr.

36) Wenn er es aber so hätte einrichten wollen, daß er den 11ten Tag 11 Sgr. zurückzulegen hätte, wie viel müßte er da den ersten und letzten Tag zurücklegen? A. Den ersten 3 Sgr., den letzten 27 Sgr.

37) Die Summe des ersten und 7ten Gliedes einer arithmetischen Progression sei m, die des 3ten und 6ten n, welches ist das Anfangsglied und die Differenz der Progression? Antw. $d = n - m$, $a = \frac{7m - 6n}{2}$

38) Allgemein sei die Summe des pten und qten Gliedes gleich m, die des rten und tten gleich n, welches ist das Anfangsglied und die Differenz? A. $a = \frac{(p+q-2)n-(t+r-2)m}{2(p+q-t-r)}$,

$d = \frac{m-n}{p+q-t-r}$

39) Wie groß ist aber bei den Bedingungen der vorigen Aufgabe das pte, qte, rte und tte Glied selbst? A. Das pte Glied ist $\frac{(q-p)n-(t+r-2p)m}{2(p+q-t-r)}$,

das qte $\frac{(p-q)n-(t+r-2q)m}{2(p+q-t-r)}$,

das rte $\frac{(p+q-2r)n-(t-r)m}{2(p+q-t-r)}$,

das $t$te $\frac{(p+q-2t)n-(r-t)m}{2(p+q-t-r)}$,

40) Die Summe des ersten und letzten Gliedes einer arithmetischen Progression von n Gliedern sei q, das Produkt dieser beiden Glieder sei p; wie groß ist das erste, das letzte Glied, die Differenz und die Summe aller Glieder? A. Das erste Glied ist $\frac{q \mp \sqrt{q^2-4p}}{2}$, das letzte $\frac{q \pm \sqrt{q^2-4p}}{2}$, die Differenz $\pm\sqrt{\frac{q^2-4p}{n-1}}$, die Summe aller Glieder $\frac{1}{2}nq$.

II. Geometrische Progressionen.

Die beiden Hauptformeln bei den geometrischen Progressionen sind $u = ae^{n-1}$ und $s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$, wo a, u, n, s dasselbe bedeuten, wie bei den arithmetischen Progressionen, e aber den Exponent der Progression bezeichnet. Wie bei den arithmetischen, so ergeben sich auch bei den geometrischen Progressionen 20 Formeln, nach denen man aus drei Größen immer eine vierte finden kann, von welchen Formeln jedoch 4 die zu suchende Größe nicht durch eine explicite, sondern durch eine implicite Gleichung angeben. Es folgen zunächst wieder Beispiele für jede dieser Formeln.

41) $a = \frac{1}{2}$, $e = 3$, $n = 5$, wie groß ist u? A. $40\frac{1}{2}$.

42) $a = 4$, $e = \frac{1}{2}$, $s = 7\frac{63}{64}$, wie groß ist u? A. $\frac{1}{64}$.

43) $a = 4$, $n = 2$, $s = 24$, wie groß ist u? A. 20.

44) $e = 2$, $n = 7$, $s = 255$, wie groß ist u? A. 128.

45) $a = -2$, $e = -5$, $n = 6$, wie groß ist s? A. 5208.

46) $a = 2\frac{1}{2}$, $e = 1\frac{1}{3}$, $u = 7\frac{73}{81}$, wie groß ist s? A. $24\frac{17}{162}$.

47) $a = 4$, $n = 6$, $u = 30\frac{3}{8}$, wie groß ist s? A. $83\frac{1}{8}$.*)

---

*) Aus a, n, u kann s nur durch logarithmische Rechnung gefunden werden, es müßte denn n nicht groß sein; daher findet man s nicht ganz genau; jedoch giebt in obigem Beispiele die Rechnung ziemlich genau 83,125.

48) $e = 2$, $n = 7$, $u = -192$, wie groß ist s? A. -381.

49) $a = 5$, $n = 14$, $u = 137$, wie groß ist e? A. 1,29002..

50) $a = 21$, $n = 2$, $s = 168$, wie groß ist e? A. 7.

51) $a = 1$, $u = 729$, $s = 1093$, wie groß ist e? A. 3.

52) $n = 2$, $u = -12$, $s = -14$, wie groß ist e? A. 6.

53) $a = 3\frac{3}{4}$; $e = 3\frac{1}{3}$, $s = 57155$, wie groß ist n? A. 9.

54) $a = \frac{1}{3}$, $e = 1\frac{1}{2}$, $s = 56\frac{3067}{3072}$, wie groß ist n? A. 11.

55) $a = 3$, $u = 48$, $s = 93$, wie groß ist n? A. 5.

56) $e = 3$, $u = 108$, $s = 160$, wie groß ist n? A. 4.

57) $e = 5$, $n = 4$, $u = 875$, wie groß ist a? A. 7.

58) $e = 4$, $n = 16$, $s = 14316557650$, wie groß ist a? A. 10.

59) $e = -\frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{8}$, $s = -2\frac{5}{8}$, wie groß ist a? A. -4.

60) $n = 2$, $u = 3$, $s = 5$, wie groß ist a? A. 2.

61) Wenn $a = 12$, $e = 4$ und $n = 6$ ist, wie groß ist u und s? A. $u = 12288$, $s = 16380$.

62) Wenn $a = 6$, $u = 39366$ und $s = 59046$ ist, wie groß ist n und e? A. $n = 9$, $e = 3$.

63) Wenn $a = 7$, $n = 8$ und $u = 546875$ ist, wie groß ist e und s? A. $e = 5$, $s = 683592$.

64) Zwischen 4 und 7 sollen noch 13 Glieder eingeschoben werden, so daß man eine geometrische Progression von 15 Gliedern enthält, wie groß ist der Exponent der Progression? Antw. 1,0407823..

65) Wie groß würde der Exponent sein, wenn zwischen 3 und 7 noch 13 Glieder eingeschoben werden sollten? A. 1,06239..

66) Wie viel Glieder würde eine geometrische Progression enthalten, wenn das erste Glied 1, das letzte 2 und der Exponent 1,059463.. wäre? A. 13.

67) Vier Personen erhalten zusammen 425 Thlr. und zwar jede folgende immer 4 mal mehr, als die vorhergehende; wie viel erhielt jede? A. 5 Thlr., 20 Thlr., 80 Thlr., 320 Thlr.

68) 1000 Thlr. sollen unter einige Personen so vertheilt werden, daß der, welcher am meisten erhält, 675 Thlr. bekommt, jeder folgende aber nur immer einen bestimmten Theil von dem Antheile des vorhergehenden erhält; es findet sich, daß der letzte dann nur 25 Thlr. erhält; wie viel waren es Personen und den wie vielten Theil von dem Antheile des vorhergehenden erhielt jeder folgende? A. Es theilten sich 4 Personen, jeder folgende erhielt ein Drittel von dem, was der vorhergehende bekam.

69) A verkauft an B 11 Bücher und verlangt für das erste einen Spf., für das zweite 3 Spf., für das dritte 9 Spf. und so fort für jedes folgende immer dreimal mehr; B sagt: lieber will ich fürs erste 1 Thlr., fürs zweite 3 Thlr., fürs dritte 5 Thlr. und so fort für jedes folgende 2 Thlr. mehr geben; wie viel verlangte A und wie viel bot B? Antw. A verlangte 246 Thlr. 1 Sgr. 1 Pf., B bot 121 Thlr.

70) Wenn ein Schmidt für den ersten der 32 Nägel eines Hufbeschlages 1 Spf., für jeden folgenden immer noch einmal so viel bekäme, welche ungeheure Summe würde er dann erhalten? A. 11930464 Thlr. 21 Sgr. 3 Pf.

71) Wenn aber bei derselben Bedingung wie bei 70 der Schmidt für den Hufbeschlag 2912 Thlr. 21 Sgr. 3 Spf. erhalten hätte, wie groß wäre dann die Anzahl der Nägel gewesen? Antw. 20.

72) Wenn Jemand 3 Metzen aussäete und die ganze Aerndte wieder zur Aussaat für das folgende Jahr benutzte, und so fort bis zum 6ten Jahre, in welchem die Aerndte 46865 Metzen betrug, um wie vielmal muß sich da das Saatkorn bei jeder Aerndte vermehrt haben, vorausgesetzt, daß diese Vermehrung immer dieselbe bliebe? A. Fünfmal.

73) Jemand hat 8 Gefäße, in welche zusammen 1640 Quart gehen, und zwar würde jedes kleinere das nächst größere immer nur zum dritten Theile füllen; wie viel Quart faßt das größte und das kleinste? A. Das größte $1093\frac{1}{3}$ und das kleinste $\frac{1}{3}$ Quart.

74) Wie groß ist die Summe folgender ins Unendliche fortlaufenden Reihe $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81} \ldots$? A. $2\frac{1}{4}$.

75) Wie groß von $\frac{5}{7}, \frac{10}{21}, \frac{20}{63}, \frac{40}{189} \ldots$? A. $2\frac{1}{7}$.

76) Wie groß $\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, \frac{3}{256} \ldots$? A. 1.

77) Wie groß $\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \ldots [a < b]$? A. $\frac{a}{b-a}$

78) Wenn die Summe einer ins Unendliche fortgehenden geometrischen Progression $1\frac{1}{3}$, der Exponent aber $\frac{1}{2}$ ist, wie groß ist das erste Glied? A. $\frac{2}{3}$.

79) Das erste Glied einer ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Progression ist $\frac{2}{5}$, die Gliedersumme $\frac{6}{5}$, wie groß ist der Exponent? A. $\frac{2}{3}$.

80) Die Summe der $n - 1$ ersten Glieder einer geometrischen Progression von n Gliedern sei A, die Summe der $n - 1$ letzten Glieder B, wie groß ist der Exponent der Progression? A. $\frac{B}{A}$.

81) Das Produkt des ersten und 7ten Gliedes einer geometrischon Progression sei m, des 3ten und 6ten n; welches ist das Anfangsglied und welches der Exponent? A. $a = \sqrt{\frac{m^7}{n^6}}$ und $e = \frac{n}{m}$

82) Das Produkt des pten und qten Gliedes sei gleich m, das des rten und tten gleich n; welches ist das Anfangsglied und der Exponent? Antw.

$$a = \sqrt[2(p+q-r-t)]{\frac{n^{p+q-2}}{m^{r+t-2}}}, \quad \text{und} \quad e = \sqrt[p+q-r-t]{\frac{m}{n}}$$

83) Wie groß ist aber bei den Bedingungen der vorigen Aufgabe des pten, qten, rten, tten Glied selbst? Antw.

Das pte Glied ist $\sqrt[2(p+q-r-t)]{\frac{n^{q-p}}{m^{r+t-2p}}}$, das qte $\sqrt[2(p+q-r-t)]{\frac{n^{p-q}}{m^{r+t-2q}}}$,

das rte Glied ist $\sqrt[2(p+q-r-t)]{\frac{n^{p+q-2r}}{m^{t-r}}}$, das tte $\sqrt[2(p+q-r-t)]{\frac{n^{p+q-2t}}{m^{r-t}}}$

Vergleichung der Aufgaben 81 — 83 mit den Aufgaben 37 — 39.

III. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

84) Vom wievielten Grade ist die Reihe der Zahlen 2, 5, 13, 29, 56, 97 u. s. w. und welches ist in ihr das 15te Glied und wie groß die Summe der ersten 15 Glieder? A. Von der dritten Ordnung; das 15te Glied ist 1591 und die Summe der ersten 15 Glieder 6715.

85) Vom wievielten Grade ist die Reihe der Zahlen 11, 13, 20, 42, 89, 171, 298 u. s. w., welches ist das 14te Glied derselben und welches die Summe der ersten 14 Glieder? Antw. Vom dritten Grade; das 14te Glied ist 3287, die Summe der ersten 14 Glieder 12166.

86) Gegeben ist die Reihe: 1, 8, 20, 53, 135, 309, 636, 1198 u. s. w.; von welcher Ordnung ist sie; welches ist das 10te Glied und wie groß die Summe der 10 ersten Glieder? A. Die Reihe ist von der 5ten Ordnung, das 10te Glied 3478, die Summe der ersten 10 Glieder 7939.

87) Gegeben ist die Reihe 5, 9, 16, 28, 48, 80 u. s. w., von welcher Ordnung ist sie, welches ist ihr 20tes Glied und welches ist die Summe der ersten 20 Glieder? A. Die Reihe ist von der vierten Ordnung, das 20te Glied 6408, die Summe der ersten 20 Glieder 29474.

88) Gegeben ist die Reihe 12, 16, 22, 35, 60, 102 u. s. w., von welcher Ordnung ist sie, welches ist das 30te Glied und die Summe der 30 ersten Glieder? A. Von der dritten Ordnung ist die Reihe, ihr 30tes Glied 19210, die Summe der 30 ersten Glieder 147245.

89) Gegeben ist die Reihe 5, 9, 16, 26, 39 u. s. w.; von welchem Grade ist sie, welches ist ihr 12tes Glied und welches ist die Summe der ersten 12 Glieder? A. Die Reihe ist von der zweiten Ordnung, ihr 12tes Glied 214 und die Summe der ersten 12 Glieder 984.

90) Gegeben ist die Reihe 1, 3, 8, 20, 48, 106 u. s. w.; welches ist ihre Ordnung, welches das 8te Glied und die Summe der 8 ersten Glieder? A. Die Reihe ist von der vierten Ordnung; das 8te Glied der Reihe ist 393, und die Summe der 8 ersten Glieder 792.

91) Wie viel beträgt das 12te Glied und die Summe der 12 ersten Glieder von der Reihe: a, $a + b$, $a + 2b + c$, $a + 3b + 3c$, $a + 4b + 6c$, u. s. w.? A. Das 12te Glied ist $a + 11b + 55c$ und die Summe der ersten 12 Glieder $12a + 66b + 220c$.

92) Wie viel beträgt das 14te Glied und die Summe der ersten 14 Glieder in der Reihe: a, $a + b$, $3a + 2b$, $7a + 3b + c$, $13a + 4b + 4c$, $21a + 5b + 10c$, $31a + 6b + 20c$ u. s. w.? A. Das 14te Glied beträgt $157a + 13b + 286c$ und die Summe der ersten 14 Glieder $742a + 91b + 1001c$.

93) Von welcher Ordnung sind die in 91 und 92 aufgestellten Reihen? A. Die in 91 von der zweiten, die in 92 von der dritten.

94) Welches ist in folgender Reihe das 10te Glied und die Summe der 10 ersten Glieder und von welcher Ordnung ist die Reihe: a, $a + b$, $2a + 2b$, $4a + 4b$, $8a + 8b$, $16a + 15b$, $31a + 26b$, $57a + 42b$ u. s. w.? Antw.

Das 10te Glied ist $163a + 93b$, die Summe der 10 ersten Glieder $382a + 255b$ und die Reihe von der 4ten Ordnung.

95) Wie würde eine Reihe fortschreiten, deren $x$tes Glied $x^2 + 1$ wäre und von welcher Ordnung wäre sie? A. 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65 u. s. w.; sie wäre von der 2ten Ordnung.

96) Wie würde eine Reihe fortschreiten, deren $x$tes Glied $\frac{1}{8}(x+1)(x+3)(x+5)$ wäre, und von welcher Ordnung wäre sie? A. 16, 35, 64, 105, 160, 231 u. s. w.; sie wäre von der dritten Ordnung.

97) Gegeben ist die Reihe 4, 10, 18, 28, 40 u. s. w.; wie groß ist ihr $x$tes Glied und wie groß die Summe der x ersten Glieder? A. Das $x$te Glied ist $x(x+3)$ und die Summe der x ersten Glieder $\frac{x(x+1)(x+5)}{3}$.

98) Gegeben ist die Reihe 6, 24, 60, 120, 210, 336 u. s. w.; wie groß ist das $x$te Glied und wie groß die Summe der x ersten Glieder? A. Das $x$te Glied ist $x(x+1)(x+2)$ und die Summe der x ersten Glieder $\frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3)$.

99) Gegeben ist die Reihe: 6, 30, 110, 306, 702, 1406, 2550 u. s. w.; wie groß ist das $x$te Glied und wie groß die Summe der x ersten Glieder? Antw. Das $x$te Glied ist $(x^2+1)(x^2+2)$ und die Summe der x ersten Glieder

$$\frac{(6x^4 + 15x^3 + 40x^2 + 45x + 74)x}{30}$$

100) Welches wäre in der in 94 gegebenen Reihe das $x$te Glied und die Summe der x ersten Glieder? A. Das $x$te Glied ist $\frac{1}{24}(ax^4 - 2(5a-2b)x^3 + (47a-24b)x^2 - 2(43a - 34b)x + 24(3a-2b))$.

die Summe der x ersten Glieder ist

$$\frac{x[ax^4-5(2a-b)x^3+5(11a-6b)x^2-5(22a-23b)x+2(92a-45b)]}{120}$$

101) Welches ist die Summe der x ersten Quadratzahlen? A. $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$

102) Wie viel beträgt die Summe der 18 ersten Quadratzahlen? A. 2109.

103) Wie viel beträgt die Summe der 24 ersten Quadratzahlen? A. 4900.

104) Wie groß ist die Summe der x ersten Cubikzahlen? A. $\frac{1}{4}x^2[x+1]^2$.

105) Wie groß ist die Summe der 18 ersten Cubikzahlen? A. 29241.

106) Wie groß ist die Summe der 24 ersten Cubikzahlen? A. 90000.

107) Welches ist die Formel für die Summe der x ersten Biquadratzahlen? Antw.

$$\frac{x[x^2(6x^2+15x+10)-1]}{30}$$

108) Wie viel beträgt die Summe der 18 ersten Biquadratzahlen? A. 432345.

109) Wie viel beträgt die Summe der 24 ersten Biquadratzahlen? A. 1763020.

110) Welches ist die Formel für die Summe der 5ten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis x? Antw.

$$\frac{[(2x(x+3)+5)x^2-1]x^2}{12}$$

111) Wie viel beträgt die Summe der 5ten Potenzen der Zahlen von 1 — 18? A. 6657201.

112) Wie viel beträgt die Summe der 5ten Potenzen der Zahlen von 1 — 24? A. 35970000.

Uebungen im Finden des allgemeinen und summatorischen Gliedes arithmetischer Reihen höherer Ordnung bieten auch die im ersten Kapitel unter 14 bis 20 erhaltenen Zahlenreihen dar.

113) Welches ist die $x$te dreieckige Zahl [Triangularzahl]? A. $\frac{x(x+1)}{2}$.

114) Welches ist die $x$te zehneckige Zahl? A. $(4x-3)x$.

115) Welches ist die $x$te zwanzigeckige Zahl? A. $(9x-8)x$.

116) Welches ist die $x$te 16eckige Zahl? A. $(7x-6)x$.

117) Welches ist allgemein die $x$te $n$eckige Polygonalzahl? A. $\frac{x(2+(x-1)(n-2))}{1.2} = \frac{1}{2}(n-2)x^2 - \frac{1}{2}(n-4)x$

$= \frac{[(n-2)x-(n-4)]x}{2}$.

118) Wie groß ist die 18te Triangular-, Quadrat-, Pentagonal- bis Zehneckszahl? A.

Seitenzahl	3	4	5	6	7	8	9	10
Polygonalzahl	171	324	477	630	783	936	1089	1242

Was für eine Reihe bilden die in 118 gefundenen Polygonalzahlen?

119) Ein dreieckiger Kugelhaufen hat unten als Grundlage eine Kugelmenge, welche ein gleichseitiges Dreieck mit 18 Kugeln in der Seite bildet, darauf eine Kugelmenge, welche ein gleichseitiges Dreieck mit 17 Kugeln in der Seite bildet und so fort, so daß oben eine Kugel liegt, wie viel beträgt die Summe aller dieser Kugeln [die 18te dreiseitige Pyramidalzahl]? A. 1140.

120) Wie groß ist die 13te dreiseitige Pyramidalzahl? A. 455.

121) Wie groß ist die $x$te dreiseitige Pyramidalzahl? Antw. $\frac{x(x+1)(x+2)}{6}$

122) Ein dreiseitiger Kugelhaufen enthält a [77] mal mehr Kugeln, als in einer seiner untern Seite Kugeln liegen? wie viel Kugeln enthält die untere Dreiecksseite? Antwort: $\frac{\sqrt{24a+1}-3}{2}$ [20].

123) Wie groß ist die 16te viereckige Pyramidalzahl? A. 1496.

124) Wie viel beträgt die 17te viereckige Pyramidalzahl? A. 1785.

123 und 124 verglichen mit 101 — 103.

125) Wie groß ist die xte n eckige Pyramidalzahl? Antw. $\frac{x(x+1)(3+(x-1)(n-2))}{1.2.3}$

126) Wie groß ist demnach die xte 5eckige Pyramidalzahl? A. $\frac{x^2(x+1)}{1.2}$

127) Wie groß ist die xte [5te] 16eckige Pyramidalzahl? Antw. $\frac{x(x+1)(14x-11)}{1.2.3}$ [295].

128) Ein länglicher 4eckiger Kugelhaufen hat auf einer Seite 24, auf der andern 10 Kugeln zur untern Grundfläche, wie viel enthält er Kugeln? A. 1155.

129) Wenn er aber 17 Kugeln auf der einen, 9 Kugeln auf der andern Seite hätte, wie viel Kugeln enthielte er dann? Antw. 645.

130) Hätte er aber 15 auf der kurzen Seite und 10 oben auf dem Rücken, wie viel Kugeln enthielte er? A. 2320.

131) Wollte man alle n eckigen Pyramidalzahlen von der 1ten bis zur x ten summiren, was würde man da für eine Formel erhalten? Antw.

$$\frac{x(x+1)(x+2)[4+(x-1)(n-2)]}{1.2.3.4}$$

Vergleicht man 117, 125 und 131, so wird man leicht das Gesetz auffinden, nach dem man auf ähnliche Weise Formeln für Reihen immer höherer Grade aufstellen könnte.

IV. Zusammengesetzte Zins- und Rentenrechnung.

132) Wie groß wird eine Größe a, die sich jährlich um P pr. vermehrt, nach n Jahren? Antw. ap^n, wo

$$p = 1 + \frac{P}{100} = \frac{100 + P}{100} \text{ ist.}$$

Setzt man den künftigen Werth von a zu P pr. in n Jahren gleich w, welche Gleichungen erhält man dann zwischen den 4 Größen a, p, n, w, durch welche immer eine aus den drei andern berechnet werden kann? A. $w = ap^n$, $a = \frac{w}{p^n}$,

$$p = \sqrt[n]{\frac{w}{a}}, \quad n = \frac{\lg w - \lg a}{\lg p}$$

133) 900 Thlr. stehen 7 Jahre lang zu 4 pr. auf Zinseszins; was wird aus diesem Kapitale? A. 1184,338 Thlr. c.*)

134) Zu wie viel pr. müssen 150 Thlr. ausgeliehen werden, um in 13 Jahren zu einem Kapitale von 300,8665 Thlrn. anzuwachsen? A. Zu $5\frac{1}{2}$ pr. c.

135) In welcher Zeit wird ein Kapital von 720 Thlr., zu $4\frac{1}{2}$ pr. auf Zinseszinsen ausgeliehen, 2200 Thlr.? A. In 25,375 Jahren c.

136) Welches Kapital giebt in 13 Jahren, zu 5 pr. ausgeliehen, 7000 Thlr.? A. 3712,249 Thlr. c.

137) Was ist der künftige Werth von 4550 Thlrn. in 3 Jahren zu $4\frac{1}{2}$ pr.? A. 5192,306 Thlr. c.

138) In welcher Zeit werden 300 Thlr., zu 3 pr. ausgeliehen, 396 Thlr.? A. In 9,4 Jahren c.

*) Das den Zahlenwerthen angefügte c soll anzeigen, daß dieselben in der letzten Ziffer nicht völlig genau, sondern nur ohngefähr (circiter) richtig sein können.

139) Zu wie viel pr. müssen 1100 Thlr. ausgeliehen werden, um in $5\frac{1}{2}$ Jahren 2000 Thlr. zu werden? A. Zu 11,4825 pr. c.

140) Wie viel hätte Jemand vor 300 Jahren Geld anlegen müssen, damit das Kapital, zu 4 pr. auf Zinseszins verborgt, jetzt 1000000 Thlr. betrüge? A. 7,762652 Thlr. c. = 7 Thlr. 22 Sgr. 10,5547 Pf. c.

141) Wie viel enthielt ein Wald, der jetzt zu 42400 Klaftern geschätzt wird, vor 11 Jahren, wenn man die jährliche Vermehrung desselben durch das Wachsen auf 3 pr. anschlägt? Antw. 30630,7 Klaftern c.

142) Ein Wald enthielt 42000 Klaftern Holz, wie viel Klaftern wird er in 20 Jahren enthalten, wenn seine jährliche Vermehrung auf $2\frac{1}{2}$ pr. angenommen wird? A. 68822 Klaftern c.

143) In welcher Zeit vermehrt sich ein Wald von 1560000 Klaftern auf 2098029, wenn die jährliche Vermehrung auf $2\frac{1}{2}$ pr. angenommen wird? A. In 12 Jahren c.

144) In welcher Zeit wird aus einer Bevölkerung von 70000 Menschen eine Bevölkerung von 100000, wenn man die jährliche Vermehrung auf $1\frac{1}{2}$ pr. annimmt? A. In 23,956 Jahren c.

145) Wenn sich die Bevölkerung einer Stadt in einem Jahre von 7500 auf 7605 Menschen vermehrte, um wie viel pr. hätte sie sich da vermehrt, und wie viel Einwohner würde da die Stadt in 12 Jahren haben, wenn man annähme, daß die Vermehrung immer gleichmäßig fortschritte? A. Die Vermehrung jährlich betrüge $1\frac{2}{5}$ pr.; in den 12 Jahren würde die Stadt 8862 Einwohner c. haben.

146) In einer Stadt von 2000 Einwohnern starben in einem Jahre 81, und 97 wurdeu geboren; wie viel pr. betrug die Vermehrung und wie viel Einwohner wird die Stadt in 24

Jahren zählen, wenn die Vermehrung sich gleich bleibt? A. Die Vermehrung betrug $\frac{4}{5}$ pr.; in 24 Jahren hat die Stadt 2421 Einwohner c.

147) In wie viel Jahren aber wird sich bei immer gleich bleibender Vermehrung die Einwohnerzahl dieser Stadt verdoppelt haben? A. In 87 Jahren c.

148) Wenn zwei Kapitale a und a', welche zu P und P' pr. auf n und n' Jahre verborgt sind, nach diesen Zeiträumen gleichen Werth haben sollen, welches sind dann die Formeln, welche a, P oder n aus den anderen 5 Stücken finden lehren? Antw. Setzt man, so wie $p = \frac{100 + P}{100}$, so auch $p' = \frac{100 + P'}{100}$,

so hat man $a = \frac{a'p'^{n'}}{p^n}$, $p = \sqrt[n]{\frac{a'p'^{n'}}{a}}$,

$$n = \frac{\lg a' + n' \lg p' - \lg a}{\lg p}$$

149) Welches Kapital wird in 18 Jahren, zu 5 pr. auf Zinseszins verborgt, so viel sein, als 550 Thlr. in 11 Jahren zu 4 pr.? A. 351,821 Thlr. c.

150) Zu welchem Zinsfuße müssen 9410 Thlr. verborgt werden, um in 9 Jahren eben so viel zu werden, als wenn man 8477 Thlr. 8 Jahre lang zu $3\frac{2}{3}$ pr. verborgt? Antw. Zu 2,0617 pr. c.

151) Wie lange müssen 8520 Thlr. $13\frac{1}{2}$ Sgr. zu 3 pr. auf Zinseszins verborgt werden, um eben so viel zu werden, als 9508 Thlr. in 6 Jahren zu $5\frac{1}{5}$ pr.? A. 14 Jahre c.

152) Wenn zwei Kapitale w und w' vor n und n' Jahren, zu P und P' pr. verborgt, denselben Werth hatten, welches sind dann die Formeln, welche w, p oder n aus den 5 anderen Größen finden lehren? Antw.

$$w = \frac{w'p^n}{p'^{n'}}, \quad p = \sqrt[n]{\frac{wp'^{n'}}{w'}}, \quad n = \frac{\lg w + n' \lg p' - \lg w'}{\lg p}$$

153) Wenn zwei Kapitale a und a' zu demselben Zinsfuße auf n und n' Jahre verborgt in diesen Zeiträumen die Werthe w und w' erhalten, welche Formeln sind es dann, die a, n oder w aus den 5 andern Größen finden lehren? Antw.

$$a = w\sqrt[n']{\left(\frac{a'}{w'}\right)^n}, \quad n = \frac{n'(\lg w - \lg a)}{\lg w' - \lg a'}, \quad w = a\sqrt[n']{\left(\frac{w'}{a'}\right)^n}.$$

154) Wenn zwei Kapitale a und a' in derselben Zeit, zu P und P' pr. verborgt, die Werthe w und w' erhalten, welche Formeln lehren dann a, P oder w aus den 5 andern Größen finden? A. Die Formeln sind sämmtlich logarithmische:

$$\lg a = \frac{\lg w \lg p' - (\lg w' - \lg a') \lg p}{\lg p'},$$

$$\lg p = \frac{\lg w - \lg a}{\lg w' - \lg a'} \lg p', \quad \lg w = \frac{\lg a \lg p' + (\lg w' - \lg a') \lg p}{\lg p'}$$

155) Welches Kapital hatte vor 15 Jahren, von wo an man es zu $4\frac{1}{2}$ pr. verborgte, denselben Werth, als 4500 Thlr. vor 9 Jahren hatten, von wo an man sie zu 5 pr. verborgte? A. 5613,753 Thlr. c.

156) In welcher Zeit sind 360 Thlr. zu einem gewissen Zinsfuße verborgt, 500 Thlr. werth, wenn 900 Thlr. zu demselben Zinsfuße in 11 Jahren 1539 Thlr. 9 Sgr. 3 Pf. werth sind? A. In 6,45 Jahren c.

157) Wie viel werden 325 Thlr., zu 3 pr. verborgt, werth sein, wenn 742500 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ pr. eben so lange verborgt 2135441 Thlr. werth sind? A. 660,66 Thlr. c.

158) Jemand verborgt ein Kapital von a Thlrn. zu P pr. auf n Jahre, fügt aber jährlich noch r Thlr. hinzu, oder nimmt jährlich davon r Thlr. hinweg; wie viel wird das Kapital nach den n Jahren werth sein? A. $a p^n \pm \frac{r(p^n - 1)}{p - 1}$, wo das obere Zeichen der Vermehrung, das untere der Verminderung gilt.

159) Jemand verborgt 500 Thlr. auf Zinseszins zu $3\frac{1}{2}$ pr. und legt alljährlich noch 50 Thlr. hinzu, wie hoch wird dann das Kapital nach 30 Jahren gewachsen sein? A. Bis zu 3984,51 Thlr. c.

160) Jemand giebt 6000 Thlr. zu 4 pr. auf Zinseszins, läßt sich aber jährlich 300 Thlr. auszahlen, wie viel wird sein Kapital in 20 Jahlen noch werth sein? A. 4213,3 Thlr. c.

161) Jemand verborgt 12000 Thlr. zu 5 pr. und fügt jedes Jahr noch 500 Thlr. hinzu, wie groß ist dann das Kapital in 6 Jahren? 19482,1 Thlr. c.

162) Jemand giebt 12000 Thlr. zu 4 pr. auf Zinseszins, läßt sich aber, da er mit den jährlichen Interessen nicht auskommt, jährlich 750 Thlr. statt der Interessen geben; wie stark ist sein Kapital nach 8 Jahren? A. 9512,16 Thlr. c.

163) Als er über diese Abnahme seines Vermögens erstaunt sich vornahm, in 8 Jahren dasselbe wieder bis zu der frühern Höhe von 12000 Thlr. zu bringen, wie viel durfte er sich jährlich statt der Interessen auszahlen lassen? A. $110\frac{1}{2}$ Thlr. c.

164) Setzt man, indem man die Bezeichnung von 158 beibehält, den daselbst gefundenen Werth gleich w, welches sind dann die Formeln, welche von den Größen w, a, r, n, p eine finden lehren, wenn die übrigen 4 gegeben sind? Antw.

$$w = a p^n \pm \frac{r(p^n - 1)}{p - 1}, \quad a = \frac{w(p - 1) \mp r(p^n - 1)}{p^n(p - 1)},$$

$$r = \pm \frac{(w - a p^n)(p - 1)}{p^n - 1}, \quad n = \frac{\lg[w(p-1) \pm r] - \lg[a(p-1) \pm r]}{\lg p}$$

Für p findet man folgende Gleichung vom $(n+1)$ ten Grade:

$$a p^{n+1} - (a \mp r) p^n - w p^n + w \mp r = 0.$$

165) Wenn das Kapital a Thlr. zu P pr. verborgt wird und man läßt sich jährlich mehr auszahlen, als die Interessen betragen, nämlich r Thlr., so wird in einer gewissen Zeit, in n Jahren, der Werth des Kapitals o sein; die aus diesen Bestim=

mungen hervorgehende Gleichung pflegt man **Rentengleichung** und r selbst die **Rente** zu nennen; welches ist die Rentengleichung und welches sind die Formeln, die von den Größen a, r, n, p eine aus den übrigen drei gegebenen finden lehren?

Antw. Die Rentengleichung ist $ap^n = \frac{r(p^n-1)}{p-1}$ und die Formeln sind $a = \frac{r(p^n-1)}{p^n(p-1)}$, $r = \frac{a(p-1)p^n}{p^n-1}$, $n = \frac{\lg r - \lg[r-a(p-1)]}{\lg p}$; für p findet man folgende Gleichung vom $(n+1)$ten Grade: $ap^{n+1} - (a+1)p + r = o$.

166) Jemand will 10 Jahre lang eine Rente von 440 Thlrn. beziehen; wie viel Thlr. muß er einzahlen, wenn $3\frac{1}{3}$ pr. gerechnet wird? A. $3690\frac{1}{4}$ Thlr. c.

167) Jemand giebt 4000 Thlr., um 32 Jahre lang eine Rente zu beziehen; wie stark wird dieselbe sein, wenn 4 pr. gerechnet wird? A. 223,79 Thlr. c.

168) Wie lange wird Jemand, der 4295,82 Thlr. einzahlt, eine Jahrrente von 400 Thlrn. beziehen können, wenn $4\frac{1}{2}$ pr. gerechnet wird? A. 15 Jahre c.

169) Jemand, der 20000 Thlr. besitzt, glaubt noch 30 Jahre zu leben; er giebt daher sein Vermögen einem Banquier und will sich von diesem, der 4 pr. rechnet, jährlich so viel geben lassen, daß in 30 Jahren sein Vermögen sich auf 0 reducirt hat; wie stark wird die Rente sein? A. 1156,6 Thlr. c.

170) Wie viel Jahre kann Jemand, der 14000 Thlr. besitzt, eine Jahrrente von 1200 Thlrn. beziehen [zu $5\frac{1}{2}$ pr.]? A. 16,9 Jahre.

171) Jemand, welcher noch 15 Jahre eine Rente von 450 Thlrn. zu beziehen hat, verkauft dieselbe [zu 4 pr.], wie viel bekommt er? A. 5003,26 Thlr. c.

172) Eine Schuld von 10000 Thlrn. soll in 18 Jahren abgetragen werden; wie groß muß die am Ende jedes Jahres

abzutragende Summe sein, wenn der Zinsfuß 4 pr. ist? Antw. 789,935 Thlr. c.

173) Wenn man bei einer Lebensversicherungsanstalt 6691,1 Thlr. niederlegt, um sich eine Lebensrente von 550 Thlrn. zu sichern, wie viel Jahre kann die Anstalt diese Rente ohne Nachtheil geben, vorausgesetzt, daß sie 4 pr. Zinsen berechnet? A. 17 Jahre c.

174) Zwei Renten r und r', welche auf n und n' Jahre zu P un P' pr. gerechnet werden, sind dem baaren Werthe nach einander gleich; wie groß ist dann die Rente r, wenn gegeben sind n, p, r', n', P'? A. $r = \frac{p^n(p-1)(p'^{n'}-1)r'}{p'^{n'}(p'-1)(p^n-1)}$

175) Wenn aber in 174 die beiden Zinsfuße P und P' einander gleichgesetzt werden, wie groß ist dann r? Antw.

$$r = \frac{p^{n-n'}(p'-1)r'}{p^n-1}$$

176) Wie groß wird eine Jahrrente sein, die 32 Jahre zu beziehen ist und zu 4 pr. gerechnet wird, wenn sie am baaren Werthe einer Jahrrente von 700 Thlr. gleich sein soll, welche 14,85 Jahre zu beziehen ist und zu $3\frac{1}{2}$ pr. gerechnet wird? A. 447,612 Thlr. c.

177) Jemand hat von einer Rentenanstalt, welche $4\frac{1}{3}$ pr. rechnet, eine Jahrrente von $3290\frac{1}{2}$ Thlr. auf 24 Jahre zu beziehen; er möchte dieselbe gern in eine Rente umwandeln, welche er 30 Jahre beziehen könnte; wie stark würde diese Rente sein können? A. 2919,422 Thlr. c.

178) Wie groß ist bei den Bedingungen der Aufgabe 174 und bei derselben Bezeichnung die Größe n, wenn gegeben sind r, P, r', n', P'? Antw.

$$n = \frac{\lg[r(p'-1)p'^{n'} - \lg[rp'^{n'}(p'-1) - r'(p'^{n'}-1)(p-1)]}{\lg p}$$

179) Wenn aber in 178 die beiden Zinsfuße P und P' einander gleich gesetzt werden, wie groß ist dann n? Antw.

$$n = \frac{\lg(r p^{n'}) - \lg[r p^{n'} - r'(p^{n'} - 1)]}{\lg p}$$

180) Jemand, der auf 12 Jahre eine Rente von 650 Thlrn. zu verzehren hatte, glaubte mit 435 Thlrn. jährlich auskommen zu können; der Banquier verstand sich auch dazu, ihm jährlich nur 435 Thlr. auszuzahlen, wollte jedoch nur 3 pr. rechnen; wie lange wird er diese Rente beziehen können? Antw. Fast 20 Jahre.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. Permutationen.

Die wirkliche Darstellung der Permutationen für 2, 3, 4, 5 Elemente findet man in den meisten Lehrbüchern. Es sollen daher hier nur für mehr als 5 Elemente einige Permutationen aufgestellt werden.

1) Welches sind die Permutationen von ebadcf bis ecfbda? Antwort:

ebadcf	ebcadf	ebcfad	ebdcaf
ebadfc	ebcafd	ebcfda	ebdcfa
ebafcd	ebcdaf	ebdacf	ebdfac
ebafdc	ebcdfa	ebdafc	ebdfca

ebfacd	ecabfd	ecbdaf	ecdbfa
ebfadc	ecadbf	ecbdfa	ecdfab
ebfcad	ecadfb	ecbfad	ecdfba
ebfcda	ecafbd	ecbfda	ecfabd
ebfdac	ecafdb	ecdabf	ecfadb
ebfdca	ecbadf	ecdafb	ecfbad
ecabdf	ecbafd	ecdbaf	ecfbda

2) Die Permutationen anzugeben von edfacb bis fadbec.

edfacb	efbacd	efcdba	fabecd
edfbac	efbadc	efdabc	fabedc
edfbca	efbcad	efdacb	facbde
edfcab	efbcda	efdbac	facbed
edfcba	efbdac	efdbca	facdbe
efabcd	efbdca	efdcab	facdeb
efabdc	efcabd	efdcba	facebd
efacbd	efcadb	fabcde	facedb
efacdb	efcbad	fabced	fadbce
efadbc	efcbda	fabdce	fadbec
efadcb	efcdab	fabdec	

3) Die Permutationen anzugeben von dabgfec bis daecbfg.

dabgfec	dacebgf	dacfegb	dacgfeb
dacbefg	dacefbg	dacfgbe	daebcfg
dacbegf	dacefgb	dacfgeb	daebcgf
dacbfeg	dacegbf	dacgbef	daebfcg
dacbfge	dacegfb	dacgbfe	daebfgc
dacbgef	dacfbeg	dacgebf	daebgcf
dacbgfe	dacfbge	dacgefb	daebgfc
dacebfg	dacfebg	dacgfbe	daecbfg

4) Die Permutationen von aaabbb zu entwickeln.

aaabbb	aabbba	ababba	abbbaa
aababb	abaabb	abbaab	baaabb
aabbab	ababab	abbaba	baabab

baabba	bababa	bbaaab	bbabaa
babaab	babbaa	bbaaba	bbbaaa

5) Die Permutationen von aaabbc zu entwickeln.

aaabbc	ababca	baaabc	bbcaaa
aaabcb	abacab	baaacb	bcaaab
aaacbb	abacba	baabac	bcaaba
aababc	abbaac	baabca	bcabaa
aabacb	abbaca	baacab	bcbaaa
aabbac	abbcaa	bbacba	caaabb
aabbca	abcaab	babaac	caabab
aabcab	abcaba	babaca	caabba
aabcba	abcbaa	babcaa	cabaab
aacabb	acaabb	bacaab	cababa
aacbab	acabab	bacaba	cabbaa
aacbba	acabba	bacbaa	cbaaab
abaabc	acbaab	bbaaac	cbaaba
abaacb	acbaba	bbaaca	cbabaa
ababac	acbbaa	bbacaa	cbbaaa

6) Welche 5zifferigen Zahlen lassen sich mit 5,3,3,3,0 schreiben? Antw.

53330	35330	33503	33035
53303	35303	33350	30533
53033	35033	33305	30353
50333	33530	33053	30335

7) Welche 7zifferigen Zahlen lassen sich mit 4,4,3,3,0,0,0 schreiben? Antw.

4433000	4403030	4343000	4330400
4430300	4403003	4340300	4330040
4430030	4400330	4340030	4330004
4430003	4400303	4340003	4304300
4403300	4400033	4334000	4304030

15*

4304003	4033040	3443000	3344000	3040043
4303400	4033094	3440300	3340400	3040034
4303040	4030430	3440030	3340040	3034400
4303004	4030403	3440003	3340004	3034040
4300430	4030340	3434000	3304400	3034004
4300403	4030304	3430400	3304040	3030440
4300340	4030043	3430040	3304004	3030404
4300304	4030034	3430004	3300440	3030044
4300043	4004330	3404300	3300404	3004430
4300034	4004303	3404030	3300044	3004403
4043300	4004033	3404003	3044300	3004340
4043030	4003430	3403400	3044030	3004304
4043003	4003403	3403040	3044003	3004043
4040330	4003340	3403004	3043400	3004034
4040303	4003304	3400430	3043040	3003440
4040033	4003043	3400403	3043004	3003404
4034300	4003034	3400340	3040430	3003044
4034030	4000433	3400304	3040403	3000443
4034003	4000343	3400043	3040340	3000434
4033400	4000334	3400034	3040304	3000344

8) Wie groß ist n. P.*) (abcdefghikl)? A. 39916800.

9) Wie groß ist n. P. ($a^2 b^3 c^5$) **)? A. 2520.

10) Wie groß ist n. P. ($a^3 b^5 c^4$)? A. 27720.

11) Wie groß ist n. P. ($a^3 b^3 c^3$)? A. 1680.

12) Wie groß ist n. P. ($a^3 b^3 c^8 d^4$)? A. 183783600.

13) Wie groß ist n. P. ($a^3 b^2 c^4$)? A. 1260.

14) Wie groß ist n. P. (1,1,1,3,3,3,4,7,8,8,8,8,8,8)? Antw. 3363360.

---

*) n. P. heißt numerus Permutationum, Versetzungszahl.

**) Die oben den Buchstaben beigefügten Zahlen bedeuten, wie oft die Buchstaben wiederholt werden sollen, so daß also n. P. ($a^2 b^3 c^5$) = n. P. (aabbbccccc) ist.

15) Wie groß ist n. P. (1,1,1,3,3,3,4,7,8,8,8,8,8,8,8,8)? Antw. 14414400.

16) Wie groß ist n. P. $(a^3 b^6 c^7)$? A. 960960.

17) Wie groß ist n. P. $(a^2 b^3 c^5 d)$? A. 27720.

18) Wie groß n. P. $(a^5 b^4 c^3 d^2 e)$? A. 37837800.

19) Wie groß ist n. P. $(a^7 b^6 c^5 d^4 e^3 f^2 g)$? Antw. 243110689818796800O.

20) Wie groß ist n. P. $(a^{m-n} b^n)$? Antw.

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(m-1)m}{1.2.3.4\ldots.(m-n)}$$

21) Wie groß ist n. P. $(a^m b^n)$? Antw.

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)(n+m)}{1.2.3.4\ m}$$

22) Wie viele Complexionen giebt es unter P $(a^2b^3cd^4)$, welche mit abcd anfangen? A. 60.

23) Wie viele, welche mit b^2d^3 anfangen? A. 60.

24) Wie viele Complexionen giebt unter P. $(a^4b^2c^2d^3)$, welche mit a^2dc anfangen? A. 630.

25) Wie viele, welche mit bdc^2a anfangen? A. 60.

26) Wie viele Complexionen fangen unter P. $(a^2bc^3d^2)$ mit a, b, c, d an? A. Mit a fangen 420, mit b 210, mit c 630, mit d 420 an.

27) Wie viele fangen mit abcd an? A. 12.

28) Wie viele mit ac^2d^2? A. 6.

29) Wie viele Complexionen fangen unter P. $(a^5b^3c^2)$ mit a^2b^2c an? A. 20.

30) Wie viele mit abc? A. 105.

31) Wie viele mit b^3? A. 21.

32) Wie viele sechszifferige Zahlen lassen sich mit 7,5,5,5,0,0 schreiben? A. 40.

33) Wie viele achtzifferige Zahlen lassen sich mit 8,7,7,5,5,0,0,0 schreiben? A. 1050.

34) Wie viel sechszifferige Zahlen lassen sich schreiben mit den Ziffern 6,3,3,0,0,0? A. 30.

35) Wie viel siebenzifferige Zahlen lassen sich schreiben mit den Ziffern 3,3,3,4,5,0,0? A. 300.

36) Wie viel zehnzifferige Zahlen mit 7,7,7,7,0,0,0,1,2,2? A. 8820.

37) Wie viel elfzifferige Zahlen lassen sich schreiben mit 0,0,0,0,4,5,5,5,3,3,3? A. 29400.

II. Combinationen.

38) Einige Combinationen ohne Wiederholung der Elemente a, b, c, d, e, f, g, h, i, k aufzustellen.

Aus jeder Klasse sollen die Combinationen angegeben werden, welche mit einem oder mehreren bestimmten Elementen anfangen, und zwar so, daß bei keiner Complection ein im Alphabete später stehender Buchstabe vor einen früher stehenden gesetzt werden darf.

A. Die Amben, die mit c anfangen.

cd ce cf cg ch ci ck

B. Die Ternen, welche mit d anfangen.

def	deg	deh	dei	dek
	dfg	dfh	dfi	dfk
		dgh	dgi	dgk
			dhi	dhk
				dik

C. Die Quaternen, welche mit be anfangen.

befg	befh	befi	befk
	begh	begi	begk
		behi	behk
			beik

D. Die Quinternen, welche mit ad anfangen.

adefg	adefh	adefi	adefk
	adegh	adegi	adegk
		adehi	aeehk
			adeik
	adfgh	adfgi	adfgk
		adfhi	adfhk
			adfik
		adghi	adghk
			adgik
			adhik

E. Die Combinationen der 6ten Klasse, welche mit cd anfangen.

cdefgh	cdefgi	cdefgk
	cdefhi	cdefhk
		cdefik
	cdeghi	cdeghk
		cdegik
		cdehik
	cdfghi	cdfghk
		cdfgik
		cdfhik
		cdghik

F. Die Combinationen der 7ten Klasse, welche mit ad und ae anfangen.

adefghi adefghk
adefgik
adefhik
adeghik
adfghik
aefghik

G. Die Combinationen der 8ten Klasse, welche mit b und c anfangen.

bcdefghi bcdefghk
bcdefgik
bcdefhik
bcdeghik
bcdfghik
bcefghik
bdefghik
cdefghik

H. Die Combinationen der 9ten Klasse, welche mit abcd anfangen.

abcdefghi abcdefghk
abcdefgik
abcdefhik
abcdeghik
abcdfghik

I. Die Combination der 10ten Klasse.

abcdefghik

39) Die Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, e zu entwickeln.

A. Sämmtliche Amben.

aa	ab	ac	ad	ae
	bb	bc	bd	be
		cc	cd	ce
			dd	de
				ee

B. Sämmtliche Ternen.

aaa	aab	aac	aad	aae
	abb	abc	abd	abe
		acc	acd	ace
			add	ade
				aee
	bbb	bbc	bbd	bbe
		bcc	bcd	bce
			bdd	bde
				bee
		ccc	ccd	cce
			cdd	cde
				cee
			ddd	dde
				dee
				eee

C. Die Quaternen, welche mit b anfangen.

bbbb	bbbc	bbbd	bbbe
	bbcc	bbcd	bbce
		bbdd	bbde
			bbee
	bccc	bccd	bcce
		bcdd	bcde
			bcce

bddd	bdde
	bdee
	beee

D. Die Quinternen, welche mit ab anfangen.

abbbb	abbbc	abbbd	abbbe
	abbcc	abbcd	abbce
		abbdd	abbde
			abbee
	abccc	abccd	abcce
		abcdd	abcde
			abcee
		abddd	abdde
			abdee
			abeee

E. Die Sexternen, welche mit aab anfangen.

aabbbb	aabbbc	aabbbd	aabbbe
	aabbcc	aabbcd	aabbce
		aabbdd	aabbde
			aabbee
	aabccc	aabccd	aabcce
		aabcdd	aabcde
			aabcee
		aabddd	aabdde
			aabdee
			aabeee

40) Wie viel giebt es Unionen, Amben, Ternen u. s. f. für 1, 2, 3, 4 u. s. f. bis 20 Elemente, wenn die Elemente nicht wiederhalt werden dürfen? Antwort:

Anzahl der Elemente	1te	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te	10te	11te Klasse *)
1	1										
2	2	1									
3	3	3	1								
4	4	6	4	1							
5	5	10	10	5	1						
6	6	15	20	15	6	1					
7	7	21	35	35	21	7	1				
8	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824
19	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582
20	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960

41) Wie viel giebt es Unionen, Amben, Ternen u. s. w. für 1, 2, 3 . . Elemente, wenn die Elemente beliebig wiederholt werden dürfen? Antwort:

---

*) Die fehlenden Zahlen sind leicht zu bestimmen, indem z. B. die 13te Klasse für 19 Elemente so viel als die 6te Klasse Combinationen zählt, allgemein für n Elemente die x te so viel, als die (n—x) te Klasse.

Anzahl der Elemente	1te	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te	10te	11te	12te Klasse
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
4	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
5	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
6	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188
7	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564
8	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
9	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970
10	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930
11	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646
12	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078
13	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156
14	14	105	560	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144	5200300
15	15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961256	4457400	9657700
16	16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504	3268760	7726160	17383860

42)*) Wie oft können sich 10 Leute so stellen, daß 4 zusammenstehen, und 3 und 3? A. 4200 mal.

43) Wie oft so, daß sie zu 5, 3, 2 zusammenstehen? A. 2520 mal.

44) Wie oft können sich 12 Personen zu 5, 4, 3 stellen? A. 27720 mal.

45) Wie oft können sich 12 Personen zu 6, 4, 2 stellen? A. 13860 mal.

46) Wie oft lassen sich 36 Kugeln in Haufen bringen, von denen jeder 9 Kugeln enthält? Antwort:
21452752266265320000 mal.

47) Auf wie viel verschiedene Arten können bei einem Spiele mit 32 Karten, bei welchem jeder der 4 Spieler 8 Karten bekommt, die Karten fallen? Antwort: Auf
99561092450391000 Arten.

48) Wenn 10 Personen sich pyramidenförmig aufstellen wollen, d. h. so daß an der Spitze einer, dann 2, dann 3, dann 4 stehen; auf wievielerlei Art kann dies geschehen, wenn auf die Stellung der in einer Reihe stehenden keine Rücksicht genommen wird? A. Auf 12600 Arten.

49) Wenn 15 Personen sich pyramidenförmig aufstellen wollen, auf wievielerlei Art kann dies geschehen? Antw. Auf 37837800 Arten.

50) Wenn $1+2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n=\frac{(n+1)n}{2}=s$ Personen sich pyramidenförmig aufstellen wollen, auf wievielerlei Art kann dies geschehen? Antw. Auf

$$\frac{s.(s-1)(s-2)(s-3)\ldots\ldots4.3.2.1}{n(n-1)^2(n-2)^3(n-3)^4\ldots\ldots3^{n-2}.2^{n-1}.1^n} \text{ Arten.}$$

*) Auf die Verschiedenheit der Stellung, welche die zusammenstehenden 4, 3, 3 Personen gegen einander einnehmen, soll keine Rücksicht genommen werden.

51) Welches sind die Theiler der Zahl $12 = 2^2 \cdot 3$? A. $(1+2+2^2)(1+3)$ d. i. 1, 2, 3, 4, 6, 12.

52) Welches sind die Theiler der Zahl 400? A. $(1+2+4+8+16)(1+5+25)$ d. i. 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400.

Beispiele für ähnliche Rechnungen findet man im Kapitel II, 6.

53) Wie viel Theiler hat die Zahl $405 = 3^4 \cdot 5$, wenn man 1 und 405 mitrechnet? A. 10.

54) Wie viel Theiler hat die Zahl 64? A. 7.

55) Wie hat die Zahl 1836? A. 24.

56) Wie viel hat die Zahl 1837? A. 4.

57) Wie viel hat die Zahl 1838? A. 4.

58) Wie viel hat die Zahl 1839? A. 4.

59) Wie viel hat die Zahl 1840? A. 20.

III. Variationen.

60) Die Variationen für die Elemente a, b, c, d ohne Wiederholung zu entwickeln.

a	b	c	d
	ab	ac	ad
	ba	bc	bd
	ca	cb	cd
	da	db	dc

abc	abd	acb	acd	adb	adc
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb
dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

abcd	abdc	acbd	acdb	adbc	adcb
bacd	badc	bcad	bcda	bdac	bdca

cabd	cadb	cbad	cbda	cdab	cdba
dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba

61) Die Variationen für die Elemente a, b, c, d mit Wiederholung zu entwickeln. Es sollen nur die mit b anfangenden Quaternen aufgeführt werden, da in diesen schon die Ternen enthalten sind, wenn man nur das Anfangsglied b wegläßt; in den Ternen aber liegen auf ähnliche Weise die Amben.

baaa	baab	baac	baad
baba	babb	babc	babd
baca	bacb	bacc	bacd
bada	badb	badc	badd
bbaa	bbab	bbac	bbad
bbba	bbbb	bbbc	bbbd
bbca	bbcb	bbcc	bbcd
bbda	bbdb	bbdc	bbdd
bcaa	bcab	bcac	bcad
bcba	bcbb	bcbc	bcbd
bcca	bccb	bccc	bccd
bcda	bcdb	bcdc	bcdd
bdaa	bdab	bdac	bdad
bdba	bdbb	bdbc	bdbd
bdca	bdcb	bdcc	bdcd
bdda	bddb	bddc	bddd

62) Wie oft lassen sich 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 20 Elemente zu 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 10 variiren, wenn die Elemente nicht wiederholt werden dürfen? A.

Anzahl der Elemente	1te	2 te	3 te	4 te	5te	6 te	7 te	8 te	9 te	10te Klasse.
1	1									
2	2	2								
3	3	6	6							
4	4	12	24	24						
5	5	20	60	120	120					
6	6	30	120	360	720	720				
7	7	42	210	840	2520	5040	5040			
8	8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320		
9	9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880	
10	10	90	720	5040	30240	151200	604800	1814400	3628800	3628800
11	11	110	990	7920	55440	332640	1663200	6652800	19958400	39916800
12	12	132	1320	11880	95040	665280	3991680	19958400	79833600	239500800
13	13	156	1716	17160	154440	1235520	8648640	51891840	259459200	1037836800
14	14	182	2184	24024	240240	2162160	17297280	121080960	726485760	3632428800
15	15	210	2730	32760	360360	3603600	32432400	259459200	1816214400	10897286400
16	16	240	3360	43680	524160	5765760	57657600	518918400	4151347200	29059430400
17	17	272	4080	57120	742560	8910720	98017920	980179200	8821612800	70572902400
18	18	306	4896	73440	1028160	13366080	160392960	1764322560	17643225600	158789030400
19	19	342	5814	93024	1395360	19535040	253955520	3047466240	33522128640	335221286400
20	20	380	6840	116280	1860480	27907200	390700800	5079110400	60949324800	670442572800

63) Wie oft lassen sich 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 20 Elemente zu 1, 2, 3 u. s. w. bis 9 variiren, wenn die Elemente wiederholt werden dürfen? Antw.

Anzahl der Elemente	1te	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te Klasse.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000
11	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691
12	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352
13	13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517	815730721	10604499373
14	14	196	2744	38416	537824	7529536	105413504	1475789056	20661046784
15	15	225	3375	50625	759375	11390625	170859375	2562890625	38443359375
16	16	256	4096	65536	1048576	16777216	268435456	4294967296	68719476736
17	17	289	4913	83521	1419857	24137569	410338673	6975757441	118587876497
18	18	324	5832	104976	1889568	34012224	612220032	11019960576	198359290368
19	19	361	6859	130321	2476099	47045881	893871739	16983563041	322687697779
20	20	400	8000	160000	3200000	64000000	1280000000	25600000000	512000000000

64) Wie viel lassen sich mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ein-, zwei-, drei- u. s. w. neunzifferige Zahlen schreiben, wenn man keine von den Ziffern wiederholen darf? A. Die Antwort giebt die unter 62 gegebene Tabelle; man erhält nämlich die Zahlen, welche die Anzahl der Variationen der 1ten, 2ten bis 9ten Klasse für 9 Elemente ohne Wiederholung anzeigen.

65) Wenn aber die Ziffern wiederholt werden dürfen, wie viel ein-, zwei-, drei- u. s. w. neunzifferige Zahlen lassen sich dann mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 schreiben? A. Diese Frage beantwortet die unter 63 gegebene Tabelle.

66) Nimmt man 0 hinzu, die als erste Ziffer links keine Bedeutung hat, so fragt es sich, wie viel ein-, zwei-, drei- u. s. w. zehnzifferige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 schreiben, wenn die Wiederholung einer Ziffer nicht gestattet ist? Antw.

einziff.	zweiziff.	dreiziff.	vierziff.	fünfziff.	sechsziff.	siebenziff.
9	81	648	4536	27216	136080	544320

achtziff.	neunz.	zehnziff. Zahlen
1632960	3265920	3265920

67) Wie viel kann man mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ein-, zwei-, drei- u. s. w. zehnzifferige Zahlen schreiben, wenn jede Ziffer mehreremale wiederholt werden darf? man kann 9 ein-, 90 zwei-, 900 drei- u. s. w. 9000000000 zehnzifferige Zahlen schreiben.

68) Wie viel Würfe sind mit 1, 2, 3 u. s. w. Würfeln möglich? A. So viel als es Variationen zu 1, 2, 3 u. s. w. giebt für 6 Elemente, wenn die Elemente wiederholt werden dürfen.

69) Wie oft können 10 Personen sich pyramidenförmig aufstellen, wenn auch die verschiedenen Stellungen, welche die in einer Reihe stehenden gegen einander einnehmen können, berücksichtigt werden? A. 3628800 mal.

70) Wie oft können 15 Personen sich pyramidenförmig aufstellen? A. 1307674368000 mal.

71) Wie oft s Personen, wenn s die in 50 angegebene Bedeutung hat? A. s(s—1)(s—2)(s—3)....4.3.2.1 mal.

Vergleichung der Aufgaben 69, 70, 71 mit den Aufgaben 48, 49, 50.

IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

72) Welche Wahrscheinlichkeit hat man zu errathen, an welchem Tage der Woche Jemand geboren sei? A. $\frac{1}{7}$.

73) Wenn man weiß, daß Jemand in einem bestimmten Jahre den ersten Sonntag eines Monats geboren sei, welche Wahrscheinlichkeit hätte man dann, seinen Geburtstag zu errathen? Antw. $\frac{1}{12}$.

74) Ein Kugelhaufen enthält 8 rothe und 3 grüne Kugeln, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen von 1 Kugel 1 rothe oder 1 grüne, beim Ziehen von 2 Kugeln 2 rothe oder 2 grüne u. s. w. zu ziehen? Antw.

	K.	W.*)	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.
rothe	1	$\frac{8}{11}$	2	$\frac{28}{55}$	3	$\frac{56}{165}$	4	$\frac{7}{133}$	5	$\frac{4}{33}$	6	$\frac{2}{33}$
grüne	1	$\frac{3}{11}$	2	$\frac{6}{55}$	3	$\frac{1}{165}$						

	K.	W.	K.	W.
rothe	7	$\frac{4}{165}$	8	$\frac{1}{165}$

75) Man hat 4 rothe, 6 grüne und 9 weiße Kugeln; welche Wahrscheinlichkeit hat man, 1 rothe, grüne oder weiße, 2 rothe, grüne oder weiße u. s. w. zu ziehen? Antw.

---

*) K. bedeutet Kugeln; W. bedeutet Wahrscheinlichkeit.

	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.
rothe	1	$\frac{4}{19}$	2	$\frac{2}{57}$	3	$\frac{4}{969}$	4	$\frac{1}{3876}$				
grüne	1	$\frac{6}{19}$	2	$\frac{5}{57}$	3	$\frac{20}{969}$	4	$\frac{5}{1292}$	5	$\frac{1}{1938}$	6	$\frac{1}{27132}$
weiße	1	$\frac{9}{19}$	2	$\frac{4}{19}$	3	$\frac{28}{323}$	4	$\frac{21}{646}$	5	$\frac{7}{646}$	6	$\frac{1}{323}$

	K.	W.	K.	W.	K.	W.
weiße	7	$\frac{3}{4199}$	8	$\frac{1}{8398}$	9	$\frac{1}{92378}$

76) Man hat 3 rothe, 5 grüne und 8 blaue Kugeln; welche Wahrscheinlichkeit hat man, 1 oder 2 oder 3 u. s. w. rothe, grüne, blaue Kugeln zu ziehen? Antw.

	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.	K.	W.
rothe	1	$\frac{3}{16}$	2	$\frac{1}{40}$	3	$\frac{1}{560}$						
grüne	1	$\frac{5}{16}$	2	$\frac{1}{12}$	3	$\frac{1}{56}$	4	$\frac{1}{364}$	5	$\frac{1}{4368}$		
blaue	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{30}$	3	$\frac{1}{10}$	4	$\frac{1}{26}$	5	$\frac{1}{78}$	6	$\frac{1}{286}$

	K.	W.	K.	W.
blaue	7	$\frac{1}{1430}$	8	$\frac{1}{12870}$

77) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem Haufen von 4 rothen und 3 blauen Kugeln alle möglichen Züge zu thun, z. B. 2 rothe und 1 blaue, 1 rothe und 3 blaue u. s. f.? Antw.

*)	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.
rothe blaue	1	4	2	6	3	4	4	1						
rothe blaue	 1	3	1 1	12	2 1	18	3 1	12	4 1	3				
rothe blaue			 2	3	1 2	12	2 2	18	3 2	12	4 2	3		
rothe blaue					 3	1	1 3	4	2 3	6	3 3	4	4 3	1
Überhaupt r. od. b.	1	7	2	21	3	35	4	35	5	21	6	7	7	1

78) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem Haufer von 6 rothen und 5 grünen Kugeln zu ziehen 1 rothe, 1 grüne, 2 rothe, 2 grüne, 1 rothe und 1 grüne, u. s. fort? Antw.

---

*) F. bedeutet Fälle; es giebt also z. B. 12 Fälle, 1 rothe und 1 blaue Kugel zu ziehen, 18 Fälle, 2 rothe und 1 blaue zu ziehen. Nach dieser Tabelle kann man die Wahrscheinlichkeits-Brüche sogleich bilden, indem man die Anzahl der Fälle für die gegebene Aufgabe zum Zähler, die bei der letzten Columne, welche alle möglichen Fälle enthält, stehende

	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.
r. gr.	1	6	2	15	3	20	4	15	5	6	6	1										
r. gr.	 1	5	1 1	30	2 1	75	3 1	100	4 1	75	5 1	30	6 1	5								
r. gr.			 2	10	1 2	60	2 2	150	3 2	200	4 2	150	5 2	60	6 2	10						
r. gr.					 3	10	1 3	60	2 3	150	3 3	200	4 3	150	5 3	60	6 3	10				
r. gr.							 4	5	1 4	30	2 4	75	3 4	100	4 4	7	5 4	30	6 4	5		
r. gr.									 5	1	1 5	6	2 5	15	3 5	20	4 5	15	5 5	6	6 5	1
Über- haupt r.od.g.	1	11	2	55	3	165	4	330	5	462	6	462	7	330	8	165	9	55	10	11	11	1

79) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem Haufen von 4 rothen, 3 grünen und 2 weißen Kugeln alle möglichen Züge zu thun? Antw.

Zahl zum Nenner macht. Die Wahrscheinlichkeit, 3 rothe und 1 blaue Kugel zu ziehen, ist demnach $\frac{12}{35}$, 2 rothe und 3 blaue zu ziehen $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K.	F.	K	F
r.	1		2		3		4											
gr.		4		6		4		1										
w.																		
r.			1		2		3		4									
gr.	1	3	1	12	1	18	1	12	1	3								
w.																		
r.			1		2		3		4									
gr.		2		8		12		8		2								
w.	1		1		1		1		1									
r.					1		2		3		4							
gr.			2	3	2	12	2	18	2	12	2	3						
w.																		
r.					1		2		3		4							
gr.			1	6	1	24	1	36	1	24	1	6						
w.			1		1		1		1		1							
r.					1		2		3		4							
gr.				1		4		6		4		1						
w.			2		2		2		2		2							
r.							1		2		3		4					
gr.					3	1	3	4	3	6	3	4	3	1				
w.																		
r.							1		2		3		4					
gr.					2	6	2	24	2	36	2	24	2	6				
w.					1		1		1		1		1					
r.							1		2		3		4					
gr.					1	3	1	12	1	18	1	12	1	3				
w.					2		2		2		2		2					
r.									1		2		3		4			
gr.							3	2	3	8	3	12	3	8	3	2		
w.							1		1		1		2		1			
r.									1		2		3		4			
gr.							2	3	2	12	2	18	2	12	2	3		
w.							2		2		2		2		2			
r.											1		2		3		4	
gr.									3	1	3	4	3	6	3	4	3	1
w.									2		2		2		2		2	
Überhpt.																		
r., gr.	1	9	2	36	3	84	4	126	5	126	6	84	7	36	8	9	9	1
oder w.																		

80) Ist es wahrscheinlicher, aus einem Haufen von 8 rothen und 12 grünen Kugeln 2 rothe Kugeln zu ziehen, oder 3 grüne zu ziehen, und wie verhalten sich beide Wahrscheinlichkeiten? A. 2 rothe Kugeln zu ziehen ist weniger wahrscheinlich; die Wahrscheinlichkeiten beider Fälle verhalten sich, wie $\frac{14}{95} : \frac{11}{57} = 42 : 55$.

81) Wie viel müssen unter 10 Kugeln rothe und grüne sein, wenn man die größte Wahrscheinlichkeit haben soll, unter 5 gezogenen 3 rothe und 2 grüne zu ziehen? A. 6 rothe und 4 grüne; die Wahrscheinlichkeit ist dann $\frac{10}{21}$.

82) Wie viel müssen unter 15 Kugeln rothe und grüne sein, wenn man die größte Wahrscheinlichkeit haben soll, unter 3 gezogenen 2 rothe und 1 grüne zu ziehen? A. 10 rothe und 5 grüne; die Wahrscheinlichkeit ist dann $\frac{45}{91}$.

83) Ist es wahrscheinlicher, aus einem französischen Spiele Karten von 52 Blättern 2 Blätter von einer Farbe zu ziehen, oder 2 gleiche Blätter d. h. 2 Buben, 2 Neunen u. s. w. zu ziehen? A. Ersteres ist 4 mal wahrscheinlicher; denn beide Wahrscheinlichkeiten verhalten sich zu einander wie $\frac{4}{17} : \frac{1}{17} = 4 : 1$.

84) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß unter 3 gezogenen Blättern bei einer deutschen Karte, welche 32 Blätter enthält, gerade ein Aß sei? A. $\frac{189}{620}$.

85) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß zwei Aß darunter wären? A. $\frac{21}{620}$.

86) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß alle drei gezogenen Blätter Aß wären? A. $\frac{1}{1240}$.

87) Welche Wahrscheiniichkeit hat man, daß unter 5 aus einer deutschen Karte gezogenen Blättern 5 von einer und 1 von einer Farbe seien, oder 4 von einer und 1 von einer andern u. s. fort? Antw.

*)

A	B	C	D	Fälle	A	B	C	D	Fälle
5				56	5				224
4	1			560	4	1			6720
3	2			1568	3	2			18816
3	1	1		3584	3	1	1		43008
2	2	1		6272	2	2	1		75264
2	1	1	1	14336	2	1	1	1	57344

Irgend 5 Blätter zu ziehen 201376

88) Wenn man aus einer deutschen Karte drei Blätter zieht, ist es wahrscheinlicher, daß alle drei von einer Farbe sind, oder daß zwei von einer und eins von einer andern, oder daß jedes von einer andern Farbe ist? A. Am wahrscheinlichsten ist es, daß 2 Blätter von einer und 1 von einer andern Farbe sind, etwas unwahrscheinlicher, daß alle drei Blätter von verschiedener Farbe, am unwahrscheinlichsten aber, daß sie alle drei von derselben Farbe sind; die drei Wahrscheinlichkeiten verhalten sich wie $\frac{84}{155} : \frac{64}{155} : \frac{7}{155} = 84 : 64 : 7$.

89) Sieht man aber nicht auf die Farbe, sondern auf den Werth der Blätter, ist es wahrscheinlicher, daß von den drei gezogenen Blättern alle drei denselben Werth haben, oder daß zwei denselben und 1 einen andern, oder daß alle drei verschiedenen Werth haben? A. Am wahrscheinlichsten ist es, daß alle drei Blätter verschiedenen Werth haben, weniger wahrscheinlich, daß zwei Blätter denselben, am unwahrscheinlichsten, daß alle drei Blätter denselben Werth haben, denn die drei Wahrscheinlichkeiten verhalten sich zu einander wie $\frac{112}{155} : \frac{42}{155} : \frac{1}{155} = 112 : 42 : 1$.

90) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß man, wenn 4 mit einer deutschen Karte spielen, so daß also jeder 8 Blätter

---

*) A, B, C, D bedeutet auf der Tabelle links bestimmte, auf der Tabelle rechts beliebige Farben. Die Wahrscheinlichkeit, 3 rothe und 2 grüne Karten zu ziehen, ist demnach $\frac{1568}{201376} = \frac{7}{899}$, die Wahrscheinlichkeit, 3 von einer und 2 von einer andern Farbe zu ziehen, $\frac{18816}{201376} = \frac{84}{899}$.

bekommt, entweder die Spadille oder die Baste [zwei Blätter, die in einigen Spielen immer einen bestimmten Werth haben] bekommt? A. $\frac{1}{2}$.

91) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, sowohl die Spadille als die Baste zu bekommen? A. $\frac{7}{124}$.

92) Beim L'hombre-Spiel bekommt jeder der drei Spieler von den 40 Karten, mit denen man spielt, 9, so daß 13 liegen bleiben; welche Wahrscheinlichkeit hat man, Spadille und Baste zu bekommen? A. $\frac{3}{65}$.

93) Nachdem die Karten gegeben sind, kann man von den liegen gebliebenen Kartenblättern n Blätter kaufen, wo n nicht $>$ 9 sein darf; welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß unter den n Karten Spadille und Baste sei? A. $\frac{n(n-1)}{930}$

94) Ich denke mir 4 Zahlen von 1—100; welche Wahrscheinlichkeit hat man, anzunehmen, daß unter diesen 4 Zahlen die Zahl 20 sei? A. $\frac{1}{25}$.

95) Welche, daß 20 und 30 darunter seien? A. $\frac{1}{825}$.

96) Welche, daß 20, 30, 40 darunter seien? A. $\frac{1}{40425}$.

97) Welche, daß die 4 gedachten Zahlen gerade die Zahlen 20, 30, 40, 50 seien? A. $\frac{1}{3921225}$.

98) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 7 Zahlen, die Jemand nennen darf, 3 zu rathen, die ein Anderer sich gedacht hat, vorausgesetzt, daß dieser sich nur Zahlen von 1 — 20 denken darf? A. $\frac{7}{228}$.

99) Aufzählung der Anzahl der möglichen Würfe, die man mit zwei Würfeln machen kann.

*) Augen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl d. Würfe	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Anzahl aller möglichen Würfe 36.

*) Hiernach können die Wahrscheinlichkeitsbrüche sogleich angegeben werden; die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 5 zu werfen, ist also $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Ebenso bei den folgenden Aufgaben.

100) Aufzählung der Anzahl aller möglichen Würfe, die man mit 3 Würfeln machen kann:

Augen	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Würfe	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Anzahl aller möglichen Würfe 216.

101) Dasselbe bei 4 Würfeln:

Augen	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Würfe	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104

Augen	18	19	20	21	22	23	24
Würfe	80	56	35	20	10	4	1

Anzahl aller möglichen Würfe 1296.

102) Dasselbe bei 5 Würfeln:

Augen	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18*)
Würfe	1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780

Anzahl aller möglichen Würfe 7776.

103) Dasselbe für 6 Würfel:

Augen	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Würfe	1	6	21	56	126	252	456	756	1161	1666	2247	2856

Augen	18	19	20	21
Würfe	3431	3906	4221	4332

Anzahl aller möglichen Würfe 46656.

104) Ist es wahrscheinlicher, mit 4 Würfeln 10 oder mit 5 Würfeln 14 zu werfen? A. Das zweite ist wahrscheinlicher, als das erste; beide Wahrscheinlichkeiten verhalten sich nämlich wie $\frac{5}{81} : \frac{5}{72} = 8 : 9$.

---

*) Für 19, 20 u. s. w. Augen können die Würfe aus den früheren entnommen werden, da bei 5 Würfeln 19 Augen so oft, als 16, 20 so oft als 15 u. s. w., im Allgemeinen bei n Würfeln x Augen so oft, als 7 n — x Augen geworfen werden können.

105) Ist es wahrscheinlicher, mit 3 Würfeln 9 oder mit 4 Würfeln 11 zu werfen? A. Das erstere ist wahrscheinlicher und verhält sich zum zweiten, wie $\frac{25}{216} : \frac{16}{162} = 75 : 52$

106) Ist es wahrscheinlicher, aus einem Haufen Kugeln von 4 rothen, 5 grünen und 7 schwarzen 2 grüne zu ziehen oder mit 4 Würfeln 10 zu werfen? A. Ersteres ist wahrscheinlicher und verhält sich zum zweiten, wie $\frac{1}{12} : \frac{5}{81} = 27 : 20$.

107) Ist es wahrscheinlicher, mit 4 Würfeln 14 zu werfen oder aus einer französischen Karte von 52 Blättern 2 Coeur zu ziehen? A. Ersteres ist wahrscheinlicher und verhält sich zum zweiten, wie $\frac{73}{648} : \frac{1}{17} = 1241 : 648$.

108) Ist es wahrscheinlicher, mit 3 Würfeln gerade 1, 2, 3 zu werfen oder von 20 Zahlen 2 Zahlen, die sich Jemand gedacht hat, zu errathen, wenn man 5 Zahlen nennen darf? A. Das erste ist weniger wahrscheinlich und verhält sich zum zweiten, wie $\frac{1}{36} : \frac{1}{19} = 19 : 36$.

109) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit 2 Würfeln 2 bestimmte einfache Zahlen oder 1 bestimmten Pasch zu werfen, ferner irgend 2 einfache Zahlen oder irgend einen Pasch; ebenso mit 3 Würfeln 3 bestimmte einfache Zahlen oder 1 bestimmten Pasch und 2 bestimmte einfache Zahlen oder eine bestimmte Terne, ferner irgend 3 einfache Zahlen oder irgend einen Pasch und 2 einfache Zahlen oder irgend eine Terne; ebenso die möglichen Fälle für 4, 5, 6 Würfel? Antwort:

Anzahl der Würfel	Beschaffenheit der Augen	Würfe	
		bestimmt	unbestimmt
2	2 Einfache	2	30
	1 Pasch	1	6
3	3 Einfache	6	120
	1 Pasch und 1 Einfache	3	90
	1 Terne	1	6
4	4 Einfache	24	360
	1 Pasch und 2 Einfache	12	720
	2 Pasche	6	90
	1 Terne und 1 Einfache	4	120
	1 Quaterne	1	6
5	5 Einfache	120	720
	1 Pasch und 3 Einf.	60	3600
	2 Pasche und 1 Einf.	30	1800
	1 Terne und 2 Einf.	20	1200
	1 Terne und 1 Pasch	10	300
	1 Quaterne u. 1 Einf.	5	150
	1 Quinterne	1	6

*) Die in der Tabelle angegebenen Zahlen geben die günstigen Fälle, also die Zähler der Wahrscheinlichkeitsbrüche an; die möglichen Fälle, also die Nenner der Brüche, kann man aus den Aufgaben 100 bis 104 entnehmen. Die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfeln den Pasch 3.3 und die einfachen Zahlen 1.5 zu werfen, ist demnach $\frac{12}{1296}=\frac{1}{108}$; die Wahrscheinlichkeit, irgend einen Pasch und irgend zwei Einfache zu werfen, ist $\frac{720}{1296}=\frac{5}{9}$.

Anzahl der Würfel	Beschaffenheit der Augen	Würfe bestimmt	Würfe unbestimmt
	6 Einfache	720	720
	1 Pasch und 4 Einf.	360	10800
	2 Pasche und 2 Einf.	180	16200
	3 Pasche	90	1800
	1 Terne und 3 Einf.	120	7200
6	1 Terne, 1 P. u. 1 Einf.	60	7200
	2 Ternen	20	300
	1 Quaterne u. 2 Einf.	30	1800
	1 Quaterne u. 1 Pasch	15	450
	1 Quinterne u. 1 Einf.	10	180
	1 Sexterne	1	6

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Entwickelung der Produkte binomischer Faktoren und binomischer Lehrsatz.

I. Entwickelung der Produkte binomischer Faktoren.

1) $(x + 5)(x + 7)$ zu entwickeln:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 5 & x + 35 \\ \quad\;\; + 7 & \\ \hline x^2 + 12x & + 35 \end{array}$$

2) $(x - 5)(x + 7)$ zu entwickeln:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -5 & x - 35 \\ & +7 & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{x^2 + 2x - 35} \end{array}$$

3) $(x + 5)(x - 7)$ zu entwickeln:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +5 & x - 35 \\ & -7 & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{x^2 - 2x - 35} \end{array}$$

4) $(x - 5)(x - 7)$ zu entwickeln:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -5 & x + 35 \\ & -7 & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{x^2 - 12x + 35} \end{array}$$

5) $(x + 5)(x + 7)(x - 2)$ zu entwickeln:

$$\begin{array}{rr|rr|l} x^3 & +5 & x^2 & +35 & x - 70 \\ & +7 & & -10 & {}^{*)} \\ & -2 & & -14 & \\ \hline \multicolumn{5}{l}{x^3 + 10x^2 + 11x - 70} \end{array}$$

6) $(x - 4)(x - 12)(x - 3)$

$$\begin{array}{rr|rr|l} x^3 & -4 & x^2 & +48 & x - 144 \\ & -12 & & +12 & \\ & -3 & & +36 & \\ \hline \multicolumn{5}{l}{x^3 - 19x^2 + 96x - 144} \end{array}$$

7) $(x - \frac{2}{3})(x + 2)(x - 6)$

$$\begin{array}{rr|rr|l} x^3 & -\frac{2}{3} & x^2 & -\frac{4}{3} & x + 8 \\ & +2 & & +4 & \\ & -6 & & -12 & \\ \hline \multicolumn{5}{l}{x^3 - 4\frac{2}{3}x^2 - 9\frac{1}{3}x + 8} \end{array}$$

---

*) Jedesmal, wenn alle Complexionen, bei denen das erste, zweite u. s. w. Element vorkommt, gebildet sind, ist ein horizontaler Strich gemacht, z. B. hier, nachdem $(+5) \cdot (+7)$ und $(+5) \cdot (-2)$ gebildet war. Bei den Unionen ist er weggelassen.

8) $(x-3)(x-8)(x+7)(x-1)$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x^4 - 3 & x^3 + 24 & x^2 + 168 & x - 168 \\
-8 & -21 & -24 & \\
+7 & +3 & +21 & \\
\cline{3-3}
-1 & -56 & +56 & \\
 & +8 & & \\
\cline{2-2}
 & -7 & & \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{x^4 - 5x^3 - 49x^2 + 221x - 168}
\end{array}
$$

9) $(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+4)(x-5)$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x^4 - 1 & x^3 + \frac{1}{2} & x^2 + 2 & x - 10 \\
-\frac{1}{2} & -4 & -\frac{5}{2} & \\
+4 & +5 & +20 & \\
\cline{2-3}
-5 & -2 & +10 & \\
 & +\frac{5}{2} & & \\
\cline{2-2}
 & -20 & & \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{x^4 - 2\frac{1}{2}x^3 - 18x^2 + 29\frac{1}{2}x - 10}
\end{array}
$$

10) $(x+\frac{1}{3})(x+2)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x^4 + \frac{1}{3} & x^3 + \frac{2}{3} & x^2 - \frac{1}{3} & x + \frac{2}{9} \\
+2 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{9} & \\
-\frac{1}{2} & -\frac{2}{9} & +\frac{1}{9} & \\
\cline{2-3}
-\frac{2}{3} & -1 & +\frac{2}{3} & \\
 & -\frac{4}{3} & & \\
\cline{2-2}
 & +\frac{1}{3} & & \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{x^4 + 1\frac{1}{6}x^3 - 1\frac{13}{18}x^2 \qquad + \frac{2}{9}}
\end{array}
$$

11) $(x-2)(x+4)(x+3)(x+1)(x-5)$

$$
\begin{array}{r|r|r|r|l}
x^5 - 2 & x^4 - 8 & x^3 - 24 & x^2 - 24 & x + 120 \\
+4 & -6 & -8 & +120 & \\
+3 & -2 & +40 & +40 & \\
+1 & +10 & -6 & +30 & \\
\cline{2-2} \cline{4-4}
-5 & +12 & +30 & -60 & \\
 & +4 & +10 & & \\
 & -20 & +12 & & \\
\cline{2-2}
 & +3 & -60 & & \\
 & -15 & -20 & & \\
\cline{2-2}
 & -5 & -15 & & \\
\hline
\multicolumn{5}{l}{x^5 + x^4 - 27x^3 - 41x^2 + 106x + 120}
\end{array}
$$

12) $(x - 1)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{8})(x - \frac{1}{16})$:

x^5	x^4	x^3	x^2	x
-1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{1024}$
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{128}$	
$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$+\frac{1}{256}$	
$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$+\frac{1}{512}$	
$-\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$+\frac{1}{1024}$	
	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{128}$		
	$+\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$		
	$+\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{128}$		
	$+\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{256}$		
	$+\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{512}$		

$$x^5 - 1\tfrac{15}{16}x^4 + 1\tfrac{27}{128}x^3 - \tfrac{155}{512}x^2 + \tfrac{31}{1024}x - \tfrac{1}{1024}$$

13) $(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{5})(x - \frac{5}{6})(x + 2)(x - \frac{3}{4})$:

x^5	x^4	x^3	x^2	x
$+\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{15}$	$+\frac{2}{9}$	$+\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{1}{6}$	
$-\frac{5}{6}$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{2}{5}$	
$+2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{9}$	$+\frac{5}{6}$	
$-\frac{3}{4}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{3}$	
	$-\frac{4}{5}$	-1		
	$+\frac{3}{10}$	$+\frac{2}{3}$		
	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{4}$		
	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{3}{5}$		
	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{5}{4}$		

$$x^5 + \tfrac{41}{60}x^4 - 2\tfrac{251}{360}x^3 + \tfrac{83}{180}x^2 + \tfrac{91}{90}x - \tfrac{1}{3}$$

14) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$:

	x^5	x^4	x^3	x^2	x
x^6	$+1$	$+2$	$+6$	$+24$	$+120$
	$+2$	$+3$	$+8$	$+30$	$+144$
	$+3$	$+4$	$+10$	$+36$	$+180$
	$+4$	$+5$	$+12$	$+40$	$+240$
	$+5$	$+6$	$+12$	$+48$	$+360$
	$+6$	$+6$	$+15$	$+60$	$+720$
		$+8$	$+18$	$+60$	
		$+10$	$+20$	$+72$	
		$+12$	$+24$	$+90$	
		$+12$	$+30$	$+120$	
		$+15$	$+24$	$+120$	
		$+18$	$+30$	$+144$	
		$+20$	$+36$	$+180$	
		$+24$	$+40$	$+240$	
		$+30$	$+48$	$+360$	
			$+60$		
			$+60$		
			$+72$		
			$+90$		
			$+120$		

Absolute term: $+720$

$$x^6+21x^5+175x^4+735x^3+1624x^2+1764x+720$$

15) $(4x-3)(3x+2)$ zu entwickeln:

Es ist $(4x-3)(3x+2)$

$$= 4(x-\tfrac{3}{4})3(x+\tfrac{2}{3}) = 12(x-\tfrac{3}{4})(x+\tfrac{2}{3})$$
$$= 12(x^2-\tfrac{1}{12}x-\tfrac{1}{2})$$
$$= 12x^2-x-6$$

16) $(x + 2)(3x - 2)(5x - 7)(x + 15)$ zu entwickeln:

Es ist $= 15(x + 2)(x - \frac{2}{3})(x - \frac{7}{5})(x + 15)$

$x^4 + 2$	$x^3 - \frac{4}{3}$	$x^2 + \frac{28}{15}$	$x + 28$
$- \frac{2}{3}$	$- \frac{14}{5}$	$- 20$	
$- \frac{7}{5}$	$+ 30$	$- 42$	
$+ 15$	$+ \frac{14}{15}$	$+ 14$	
	$- 10$		
	$- 21$		

$$15\left[x^4 + 14\tfrac{14}{15}x^3 - 4\tfrac{1}{5}x^2 - 46\tfrac{2}{15}x + 28\right] =$$
$$= 15x^4 + 224x^3 - 63x^2 - 692x + 420$$

17) Von dem Produkte $(x + 4)(x - 3)(x - 2)(x + 7)(x - 5)$ soll nur das Glied entwickelt werden, welches Coefficient von x^2 wird:

$$(24 - 84 + 60 - 56 + 40 - 140 + 42 - 30 + 105 + 70)x^2$$
$$= 31x^2$$

18) Von dem Produkte $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)$ soll das Glied entwickelt werden, welches den Coefficienten zu x^5 bildet:

$$[2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 12 + 15 + 18 + 21 + 20 + 24 + 28 + 30 + 35 + 42)x^5 =$$
$$322x^5$$

19) Was giebt die Entwickelung des Produktes $(x - 4)(x + 5)(x - 11)$? A. $x^3 - 10x^2 - 31x + 220$

20) $(x - 3)(2x - 1)(x - 4) = 2x^3 - 15x^2 + 31x - 12.$

21) $(x + 2)(x - 3)(x + 5)(x - 10) = x^4 - 6x^3 - 51x^2 + 80x + 300.$

22) $(x - 6)(x - 2)(x - 1)(x - 3) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36$

23) $(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{4}) = x^4 + \frac{7}{12}x^3 - \frac{13}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{24}$.

24) $(x+3)(x-2)(x+4)(x+1\frac{1}{2}) = x^4 + 6\frac{1}{2}x^3 + 5\frac{1}{2}x^2 - 27x - 36$.

25) $(2x-1)(3x+2)(x-6)(x-2) = 6x^4 - 47x^3 + 62x^2 + 28x - 24$.

26) $(x+2)(x-3)(x+\frac{1}{2})(x-5) = x^4 - 5\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 29\frac{1}{2}x + 15$.

27) $(x-2)(2x+1)(x+2)(2x-1) = 4x^4 - 17x^2 + 4$.

28) $(x+4)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})(x-3) = x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 12\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{5}{6}x + 2$.

29) $(x+2)(x-3)(x+\frac{1}{4})(x-5)(x+1\frac{1}{2}) = = x^5 - 4\frac{1}{4}x^4 - 11\frac{1}{8}x^3 + 26x^2 + 52\frac{1}{8}x + 11\frac{1}{4}$.

30) $(x+3)(x-\frac{3}{2})(x-5)(x+1)(x-\frac{2}{3}) = = x^5 - 3\frac{1}{6}x^4 - 13\frac{5}{6}x^3 + 20\frac{5}{6}x^2 + 15\frac{1}{2}x - 15$.

31) $(x+\frac{3}{4})(x+4)(x-\frac{2}{3})(x+3)(x-5) = = x^5 + 2\frac{1}{12}x^4 - 23\frac{1}{3}x^3 - 62\frac{11}{12}x^2 + 6\frac{1}{2}x + 30$.

32) $(x+2)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{2})(x-5)(x+7) = = x^5 + 2\frac{3}{4}x^4 - 35\frac{5}{8}x^3 - 29\frac{3}{4}x^2 + 75\frac{7}{8}x - 26\frac{1}{4}$

33) $(5x+2)(2x-3)(x+15)(x-10)(3x-2) = = 30x^5 + 97x^4 - 4761x^3 + 7982x^2 + 540x - 1800$.

34) $(x+1)(x+5)(x+2)(x-3)(x+7)(x-10) = x^6 + 2x^5 - 92x^4 - 370x^3 + 583x^2 + 2960x + 2100$.

35) $(x-\frac{1}{2})(x+4)(x+\frac{3}{5})(x-5)(x-1)(x-6) = x^6 - 7\frac{9}{10}x^5 - 8\frac{1}{10}x^4 + 135\frac{7}{10}x^3 - 104\frac{1}{2}x^2 - 52\frac{1}{5}x + 36$

II. Binomischer Lehrsatz.

36) Was giebt die Entwickelung von $(a \pm b)^n$? A. Es ist $(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2$

$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \ldots (\pm 1)^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 b^{n-3}$

$(\pm 1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 b^{n-2} (\pm 1)^{n-1} \frac{n}{1} a b^{n-1} (\pm 1)^n b^n$

37) Bedeuten A, B, C, D, E u. s. w. die Coefficienten der einzelnen Glieder, wie lassen sie sich aus einander berechnen? Antw. Es ist

$$B = \frac{n-1}{2} A, \qquad C = \frac{n-2}{3} B,$$

$$D = \frac{n-3}{4} C, \qquad E = \frac{n-4}{5} D, \text{ u. s. w.}$$

38) Bedeuten A, B, C, D, E u. s. w. L, M, die Coefficienten der einzelnen Glieder für den Exponenten n und A′, B′, C′, D′, E′, u. s. w. L′, M′, N′ die Coefficienten der einzelnen Glieder für den Exponenten $n + 1$, wie lassen sich letztere aus ersteren berechnen? Antw. Es ist

$$A' = 1 + A, \qquad B' = A + B$$

$$C' = B + C, \qquad D' = D + C$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$M' = L + M, \qquad N' = M$$

Indem man so aus den Coefficienten einer Potenz die Coefficienten der nächsthöheren finden kann, läßt sich leicht eine Tafel dieser Binomial-Coefficienten berechnen. Bis zur 20 ten Potenz findet man diese Tafel bei der 40 ten Aufgabe des vorigen Kapitels. Ein Paar Beispiele mögen zur Erläuterung hinreichen. Ist $n > 20$, so müssen die Coefficienten erst berechnet werden.

39) $(a \pm b)^{13}$ zu entwickeln: Es ist $(a \pm b)^{13} = a^{13} \pm 13a^{12}b + 78a^{11}b^2 \pm 286a^{10}b^3 + 715a^9b^4 \pm 1287a^8b^5 + 1716a^7b^6 \pm 1716a^6b^7 + 1287a^5b^8 \pm 715a^4b^9 + 286a^3b^{10} \pm 78a^2b^{11} + 13ab^{12} \pm b^{13}$

40) $(a \pm b)^{14}$ zu entwickeln: Es ist $(a \pm b)^{14} = a^{14} \pm 14a^{13}b + 91a^{12}b^2 \pm 364a^{11}b^3 + 1001a^{10}b^4 \pm 2002a^9b^5 + 3003a^8b^6 \pm 3432a^7b^7 + 3003a^6b^8 \pm 2002a^5b^9 + 1001a^4b^{10} \pm 364a^3b^{11} + 91a^2b^{12} \pm 14ab^{13} + b^{14}$

41) $(a \pm b)^{19}$ zu entwickeln: Es ist $(a + b)^{19} = a^{19} \pm 19a^{18}b + 171a^{17}b^2 \pm 969a^{16}b^3 + 3876a^{15}b^4 \pm 11628a^{14}b^5 + 27132a^{13}b^6 \pm 50388a^{12}b^7 + 75582a^{11}b^8 + 92378a^{10}b^9 + 92378a^9b^{10} \pm 75582a^8b^{11} + 50388a^7b^{12} \pm 27132a^6b^{13} + 11628a^5b^{14} \pm 3876a^4b^{15} + 969a^3b^{16} \pm 171a^2b^{17} + 19ab^{18} \pm b^{19}$

42) $(a \pm b)^{20}$ zu entwickeln: Es ist $(a \pm b)^{20} = a^{20} \pm 20a^{19}b + 190a^{18}b^2 \pm 1140a^{17}b^3 + 4845a^{16}b^4 \pm 15504a^{15}b^5 + 38760a^{14}b^6 \pm 77520a^{13}b^7 + 125970a^{12}b^8 \pm 167960a^{11}b^9 + 184756a^{10}b^{10} \pm 167960a^9b^{11} + 125970a^8b^{12} \pm 77520a^7b^{13} + 38760a^6b^{14} \pm 15504a^5b^{15} + 4845a^4b^{16} \pm 1140a^3b^{17} + 190a^2b^{18} \pm 20ab^{19} + b^{20}$

43) $(a \pm b)^{23}$ zu entwickeln: Es ist $(a \pm b)^{23} = a^{23} \pm 23a^{22}b + 253a^{21}b^2 \pm 1771a^{20}b^3 + 8855a^{19}b^4 \pm 33649a^{18}b^5 + 100947a^{17}b^6 \pm 245157a^{16}b^7 + 490314a^{15}b^8 \pm 817190a^{14}b^9 + 1144066a^{13}b^{10} \pm 1352078a^{12}b^{11} + 1352078a^{11}b^{12} \pm 1144066a^{10}b^{13} + 817190a^9b^{14} \pm 490314a^8b^{15} + 245157a^7b^{16}$

$\pm 100947 a^6 b^{17} + 33649 a^5 b^{18} \pm 8855 a^4 b^{19} + 1771 a^3 b^{20} \pm 253 a^2 b^{21} + 23 ab^{22} \pm b^{23}$

44) $(a \pm b)^{28}$ zu entwickeln: Es ist $(a \pm b)^{28} = a^{28} \pm 28 a^{27} b + 378 a^{26} b^2 \pm 3276 a^{25} b^3 + 20475 a^{24} b^4 \pm 98280 a^{23} b^5 + 376740 a^{22} b^6 \pm 1184040 a^{21} b^7 + 3108105 a^{20} b^8 \pm 6906900 a^{19} b^9 + 13123110 a^{18} b^{10} \pm 21474180 a^{17} b^{11} + 30421755 a^{16} b^{12} \pm 37442160 a^{15} b^{13} + 40116600 a^{14} b^{14} \pm 37442160 a^{13} b^{15} + 30421755 a^{12} b^{16} \pm 21474180 a^{11} b^{17} + 13123110 a^{10} b^{18} \pm 6906900 a^9 b^{19} + 3108105 a^8 b^{20} \pm 1184040 a^7 b^{21} + 376740 a^6 b^{22} \pm 98280 a^5 b^{23} + 20475 a^4 b^{24} \pm 3276 a^3 b^{25} + 378 a^2 b^{26} \pm 28 ab^{27} + b^{28}$

45) Wie heißt von $(a \pm b)^{26}$ das 8te Glied? Antw. $\pm 657800 a^{19} b^7$.

46) Wie heißt von $(a \pm b)^{35}$ das 11te Glied? Antw. $+ 183579396 a^{25} b^{10}$.

47) Wie heißt von $(a \pm b)^{22}$ das mte Glied? Antw.

$$(\pm 1)^{m+1} \frac{22 \cdot 21 \ldots (22 - m + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m - 1)} a^{22-m+1} b^{m-1}$$

48) $(3a + 2b)^4$ zu entwickeln: Es ist $(3a + 2b)^4 = 81 a^4 + 216 a^3 b + 216 a^2 b^2 + 96 ab^3 + 8 b^4$.

49) $(5a^3 - 2b^2)^6$ zu entwickeln: Es ist $(5a^3 - 2b^2)^6 = 15625 a^{18} - 37500 a^{15} b^2 + 37500 a^{12} b^4 - 20000 a^9 b^6 + 6000 a^6 b^8 - 960 a^3 b^{10} + 64 b^{12}$.

50) $\left(\frac{a^4}{2b^3} - \frac{6c^5}{a^2}\right)^9$ zu entwickeln: Es ist $\left(\frac{a^4}{2b^3} - \frac{6c^5}{a^2}\right)^9$

$$= \frac{a^{36}}{512 b^{27}} - \frac{27 a^{30} c^5}{128 b^{24}} + \frac{81 a^{24} c^{10}}{8 b^{21}} - \frac{567 a^{18} c^{15}}{2 b^{18}}$$

$$+ \frac{5103\,a^{12}c^{20}}{b^{15}} - \frac{61236\,a^{6}}{b^{12}} + \frac{489888\,c^{30}}{b^{9}}$$
$$- \frac{2519424\,c^{35}}{a^{6}\,b^{6}} + \frac{7558272\,c^{40}}{a^{12}\,b^{3}} - \frac{10077696\,c^{45}}{a^{18}}$$

51) $\left[\frac{2a}{3} \pm \frac{3b}{2a}\right]^5$ zu entwickeln: Es ist $\left[\frac{2a}{3} \pm \frac{3b}{2a}\right]^5$
$= \frac{32\,a^5}{243} \pm \frac{40\,a^3\,b}{27} + \frac{20\,a\,b^2}{3} \pm \frac{15\,b^3}{a} + \frac{135\,b^4}{8\,a^3}$
$\pm \frac{243\,b^5}{32\,a^5}$

52) 12^5 zu entwickeln: Es ist $12^5 = (10 + 2)^5 = 10^5 + 5 \,.\, 10^4 \,.\, 2 + 10 \,.\, 10^3 \,.\, 2^2 + 10 \,.\, 10^2 \,.\, 2^3 + 5 \,.\, 10 \,.\, 2^4 + 2^5 = 100000 + 100000 + 40000 + 8000 + 800 + 32 = 248832.$

53) 43^6 zu entwickeln: Es ist $43^6 = (40 + 3)^6 = 40^6 + 6 \,.\, 40^5 \,.\, 3 + 15 \,.\, 40^4 \,.\, 3^2 + 20 \,.\, 40^3 \,.\, 3^3 + 15 \,.\, 40^2 \,.\, 3^4 + 6 \,.\, 40 \,.\, 3^5 + 3^6 = 4096000000 + 1843200000 + 345600000 + 34560000 + 1944000 + 58320 + 729 = 6321363049.$

54) Was giebt die Entwicklung von $(a \pm x)^{-n} = \frac{1}{(a \pm x)^n}$? Antw. Es ist $(a \pm x)^{-n} = a^{-n} \mp \frac{n}{1} a^{-n-1} x + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} a^{-n-2} x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{-n-3} x^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} a^{-n-4} x^4 \mp \ldots$

55) Was ist $\frac{1}{1 \pm x}$? A. Es ist $\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + \ldots$

56) Was ist $\frac{1}{(1 \pm x)^2}$? A. Es ist $= (1 \pm x)^{-2} =$
$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp 6x^5 + \ldots$

57) Was ist $\frac{1}{(1 \pm x)^3}$? A. Es ist $= (1 \pm x)^{-3} =$
$1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + 15x^4 \mp 22x^5 + \ldots$

58) Was ist $\frac{x}{a \pm x}$? A. Es ist $= x(a \pm x)^{-1} =$
$x\,[a^{-1} \mp a^{-2}x + a^{-3}x^2 \mp a^{-4}x^3 + a^{-5}x^4 \mp \ldots] =$
$\frac{x}{a} \mp \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} \mp \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{a^5} \mp \ldots$

Dasselbe giebt auch die Entwickelung des Bruches $\frac{x}{a \pm x}$ nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie die Vergleichung mit Kapitel 8, V, 4 zeigt.

59) Was giebt die Entwickelung von $(a \pm b)^{\frac{m}{n}}$? A. Es ist $(a \pm b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} a^{\frac{m}{n}-2} b^2$
$\pm \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} a^{\frac{m}{n}-3} b^3 + \ldots$

60) Was ist $\sqrt{(1+x)}$? A. Es ist $= (1+x)^{\frac{1}{2}} =$
$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$

61) Was ist $\sqrt[3]{(1-x)}$? A. Es ist $(1-x)^{\frac{1}{3}} = 1$
$- \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{9} - \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4$

62) Was ist $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$? A. Es ist $= [a^4 - b^4]^{\frac{1}{4}}$
$= a\left[1 - \frac{b^4}{a^4}\right]^{\frac{1}{4}}$ $a = \Big[1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^4}{a^4} - \frac{3}{32} \cdot \frac{b^8}{a^8} + \frac{7}{128}$
$\cdot \frac{b^{12}}{a^{12}} - \frac{77}{1134} \cdot \frac{b^{16}}{a^{16}} \ldots\Big] = a + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^4}{a^3} - \frac{3}{32} \cdot \frac{b^8}{a^7}$
$+ \frac{7}{128} \cdot \frac{b^{12}}{a^{11}} - \frac{77}{1134} \cdot \frac{b^{16}}{a^{15}} \ldots\Big]$

63) Was ist $\sqrt[5]{(a^5 - b^5)}$? A. Es ist $= a - \frac{1}{4} \cdot \frac{b^5}{a^4}$
$- \frac{2}{25} \cdot \frac{b^{10}}{a^9} - \frac{6}{125} \cdot \frac{b^{15}}{a^{14}} - \frac{21}{526} \cdot \frac{b^{20}}{a^{19}} - \frac{409}{31250} \cdot \frac{b^{25}}{a^{24}}$

64) $\sqrt[2]{30}$ zu entwickeln: Es ist $\sqrt{30} = \sqrt{25 + 5} =$
$5\sqrt{1 + \frac{1}{5}} = 5\,[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \cdot (\frac{1}{5})^2 + \frac{1}{16} \cdot (\frac{1}{5})^3$
$- \frac{5}{128} \cdot (\frac{1}{5})^4 + \ldots] = 5\,[1 + 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}0005$
$- 0{,}0000625 + 0{,}00000875 - 0{,}0000013125$
$+ 0{,}00000020625 - \ldots] = 5 \cdot 1{,}095445 \ldots =$
$5{,}477225 \ldots$

Eine rascher convergirende Reihe erhält man auf folgende Weise:
$\sqrt{30} = \sqrt{\frac{3000}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{3025 - 25} = \frac{55}{10}\sqrt{1 - \frac{25}{3025}}$
$= \frac{5}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{121}} = \frac{5}{2}[1 - \frac{1}{242} - \frac{1}{117128} - \ldots]$ u. s. w.

65) $\sqrt[2]{80}$ zu entwickeln: Es ist $\sqrt{80} = \sqrt{81 - 1} =$
$9\sqrt{1 - \frac{1}{81}} = 9\,[1 - 0{,}006172839 \ldots - 0{,}0000190519 \ldots$
$- 0{,}000000116 \ldots$ — u. s. w.$] = 9 \cdot 0{,}9938079 \ldots =$
$8{,}9442719 \ldots$

66) $\sqrt[3]{528}$ zu entwickeln: Es ist $\sqrt[3]{528} = \sqrt[3]{512+16}$ $= 8\sqrt[3]{1+\frac{1}{32}} = 8[1+\frac{1}{96}-\frac{1}{9216}+\frac{5}{2654208}-$ ıc.$] =$ $8 \,.\, 1{,}01031\ldots = 8{,}08248\ldots$

67) $\sqrt[4]{250}$ zu entwickeln: Es ist $= \sqrt[4]{256-6} = 4\sqrt[4]{[1-\frac{3}{128}]}$ $= 4\,[1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{128} - \frac{3}{32}\cdot\frac{3^2}{128^2} - \frac{7}{128}+\frac{3^3}{128^3} -$ ıc.$]$ $=4[1-0{,}005859375-0{,}000051498\ldots-0{,}0000007035\ldots$ ıc.$]$ $= 4\,.\,0{,}997408\ldots = 3{,}97635\ldots$

Druck von J. H. Nagel in Leipzig.

Berichtigungen.

S. 10 Z. 10 v. o. statt 3) lies 5)

= = Z. 18 . = statt $3\frac{5123}{1048}$ l. $3\frac{5123}{5240}$.

S. 21 Z. 9, 10, 11, 12 v. o. müssen für die 4 Zeichen : die Zeichen . gelesen werden, (also für die Divisionszeichen die Multiplicationszeichen).

S. 45 Z. 2 v. u. st. $-\frac{b}{3}$ l. $+\frac{b}{3}$

S. 49 Z. 4 v. u. st. $-\frac{1080\,y^6}{x^9}$ l. $+\frac{1080\,y^6}{x^9}$

S. 57 Z. 3 v. o. st uendlichen l. unendliche.

S. 97 Z. 8 v. u. st. ... l. =

S. 109 Z. 1 v. u. st. $\frac{1}{2}$ l. $\frac{11}{12}$.

S. 163 Z. 4 v. o. st. 2 l. 2^n.

S. 177 Z. 4 v. o. st. zwar l. war.

S. 224 Z. 1 und 15 v. u. ist ^{n} einmal nicht abgedruckt und daher zu ergänzen.

S. 247 Z. 2 und 3 v. u. muß: und 1 von zu Ende der Zeile 3, und einer zu Anfang der Zeile 2 wegfallen.

Im Verlage von Ch. E. Krappe sind noch folgende Werke erschienen:

Ahrens, E. A. I., die drei Volkstribunen Tib. Gracchus, M. Drusus und Publius Sulpicius, nach ihren politischen Bestrebungen dargestellt. kl. 8. 1836. 12 Gr.

Phaedri, A. L., Fabulae Aesopiae. Nach Orelli's Textrecension, mit einem vollständigen Wortregister und mit beständigen Hinweisungen auf die Grammatiken von Zumpt, Ramshorn und Schulz, zum Schulgebrauche herausgegeb. v. Dr. *C. A. Jordan*. 8. 1833. 9 Gr.

Reichenbach, Dr. H. Th. L., Flora Lipsiensis Pharmaceutica, sistens Plantarum agri Lipsiensis nunc et olim officinalium venetarumque diagnoses, descriptiones, synonymia, locos natales, qualitates, vires et usum. gr. 8. 1818. 1 Thlr.

Middleton's römische Geschichte, Cicero's Zeitalter umfassend, verbunden mit dessen Lebensgeschichte. Aus dem Engl. v. G. K. F. Seidel. 4 Theile. 8. 1793. 3 Thlr. 8 Gr.

Nitsch, P. F. A., kurzer Entwurf der alten Geographie. Auf's Neue verbessert, herausgegeben von Conrad Mannert, Professor in Altdorf. 11te Aufl. 8. 1837. 1 Thlr.

Kant, J., Vorlesungen über die philosophische Religionslehre. Herausgegeben von Prof. K. H. L. Pölitz. 2te Aufl. gr. 8. 1830. 1 Thlr.

Pölitz, Hofrath K. H. L., das Königreich Sachsen. Ein geschichtliches Gemälde. 2 Bände. Neue Ausgabe. 12. 1831. 1 Thlr.

— — die deutsche Sprache, für Bürgerschulen bearbeitet. gr. 8. 1804. 1 Thlr. 4 Gr.

Schilling, Dr. E. M., Handbuch des geistlichen Geschäftsstyls und der geistlichen Geschäftsverwaltung. Nebst einer Erläuterung über die kirchliche und geistliche Verfassung und der privatrechtlichen Verhältnisse der Kirchen- und Schuldiener im Königreiche Sachsen und der K. S. Oberlausitz. gr. 8. 1829. 1 Thlr. 18 Gr.

Solbrig, C. F., Taschenbuch für Freunde der Deklamation. Enthält eine Auswahl von Gedichten ernsten und launigen Inhalts, nach Regeln der Redekunst bearbeitet. 2te Aufl., mit Solbrig's Portrait. 4 Theile. 12. gebunden in Futteral. 1818. 4 Thlr.

— — Deklamirbuch für Schulen. Eine Auswahl deutscher Gedichte, Monologen, Dialogen, Reden, Erzählungen und Anekdoten religiösen, ernsten und launigen Inhalts mit Erläuterungen über den Vortrag derselben, zum Behuf des Unterrichts auf Schulen und der Uebung in der Deklamation. 2 Bde. 2. Aufl. 1835. 1 Thlr. 18 Gr.

Staatliche Bibliothek Regensburg

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Arndt, Johann Albert

Beispiele und Aufgaben aus allen Theilen der Arithmetik und Algebra soweit diese auf höheren Schulanstalten gelehrt werden ; nebst deren Auflösungen

Leipzig 1845

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5094
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112199-5